ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2020 *Ώρα Εξέτασης: 13:00-15:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

(α) Έστω $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$. Να αποδείξετε ότι

$$S_\nu = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \cdots + \nu\alpha^{\nu-1} = \frac{\nu\alpha^{\nu+1} - (\nu+1)\alpha^\nu + 1}{(\alpha-1)^2} \quad , \qquad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

(β) Να γράψετε υπό τη μορφή δύναμης του 2 την παράσταση

$$A = \frac{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + 2020 \cdot 2^{2020}}{2019}$$

Λύση

(α) Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της τέλειας Επαγωγής.

Για $\nu = 1$ ισχύει η πιο πάνω σχέση, αφού:

$$\frac{1\alpha^{1+1} - (1+1)\alpha^1 + 1}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha-1)^2} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2} = 1$$

Έστω ότι η πιο πάνω σχέση ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή

$$1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \cdots + \kappa\alpha^{\kappa-1} = \frac{\kappa\alpha^{\kappa+1} - (\kappa+1)\alpha^\kappa + 1}{(\alpha-1)^2} \qquad (1)$$

Εξετάζω κατά πόσο η σχέση ισχύει και για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή

$$1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \cdots + (\kappa+1)\alpha^\kappa = \frac{(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2} - (\kappa+2)\alpha^{\kappa+1} + 1}{(\alpha-1)^2}$$

Ά μέλος $= 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \cdots + \kappa\alpha^{\kappa-1} + (\kappa+1)\alpha^\kappa$

$$= \frac{\kappa\alpha^{\kappa+1}-(\kappa+1)\alpha^{\kappa}+1}{(\alpha-1)^2} + (\kappa+1)\alpha^{\kappa} \quad \text{[από την (1)]}$$

$$= \frac{\kappa\alpha^{\kappa+1}-(\kappa+1)\alpha^{\kappa}+1+(\kappa+1)\alpha^{\kappa}(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\kappa\alpha^{\kappa+1}-(\kappa+1)\alpha^{\kappa}+1+(\kappa+1)\alpha^{\kappa}(\alpha^2-2\alpha+1)}{(\alpha-1)^2}$$

$$= \frac{\kappa\alpha^{\kappa+1}-(\kappa+1)\alpha^{\kappa}+1+(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2}-2(\kappa+1)\alpha^{\kappa+1}+(\kappa+1)\alpha^{\kappa}}{(\alpha-1)^2} = \frac{(\kappa-2\kappa-2)\alpha^{\kappa+1}+1+(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2}-2(\kappa+1)\alpha^{\kappa+1}}{(\alpha-1)^2}$$

$$= \frac{(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2}-(\kappa+2)\alpha^{\kappa+1}+1}{(\alpha-1)^2} = \text{ Β΄ μέλος}$$

Άρα η σχέση ισχύει και για $\nu = \kappa + 1$ και ως εκτούτου σύμφωνα με την Μαθηματική Επαγωγή ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

(β) Από το (α) ερώτημα για $\alpha = 2$ και $\nu = 2020$ παίρνουμε:

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 2020 \cdot 2^{2019} = \frac{2020 \cdot 2^{2021} - 2021 \cdot 2^{2020} + 1}{(2-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 2020 \cdot 2^{2019} = 2020 \cdot 2^{2021} - 2021 \cdot 2^{2020} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας επί 2 την ισότητα (2) προκύπτει:

$$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + 2020 \cdot 2^{2020} = 2020 \cdot 2^{2022} - 2021 \cdot 2^{2021}$$

$$= 2^{2021}(2020 \cdot 2 - 2021) = 2^{2021} \cdot 2019$$

Άρα,

$$A = \frac{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + 2020 \cdot 2^{2020}}{2019} = 2^{2021}$$

Πρόβλημα 2

Αν σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση

$$\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + \eta\mu A \eta\mu B + \eta\mu B \eta\mu \Gamma + \eta\mu \Gamma \eta\mu A = 3,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

<u>Λύση</u>

$$\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + \eta\mu A \eta\mu B + \eta\mu B \eta\mu \Gamma + \eta\mu \Gamma \eta\mu A = 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - \eta\mu^2 A + 1 - \eta\mu^2 B + 1 - \eta\mu^2 \Gamma + \eta\mu A \eta\mu B + \eta\mu B \eta\mu \Gamma + \eta\mu \Gamma \eta\mu A = 3$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma - \eta\mu A \eta\mu B - \eta\mu B \eta\mu \Gamma - \eta\mu \Gamma \eta\mu A = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4R^2}+\frac{\beta^2}{4R^2}+\frac{\gamma^2}{4R^2}-\frac{\alpha}{2R}\cdot\frac{\beta}{2R}-\frac{\beta}{2R}\cdot\frac{\gamma}{2R}-\frac{\gamma}{2R}\cdot\frac{\alpha}{2R}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4R^2}+\frac{\beta^2}{4R^2}+\frac{\gamma^2}{4R^2}-\frac{\alpha}{2R}\cdot\frac{\beta}{2R}-\frac{\beta}{2R}\cdot\frac{\gamma}{2R}-\frac{\gamma}{2R}\cdot\frac{\alpha}{2R}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4R^2}+\frac{\beta^2}{4R^2}+\frac{\gamma^2}{4R^2}-\frac{\alpha\beta}{4R^2}-\frac{\beta\gamma}{4R^2}+\frac{\alpha\gamma}{4R^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma=0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma=0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\gamma)^2=0$$

Επειδή και οι τρεις όροι της τελευταίας εξίσωσης είναι μη αρνητικοί συνεπάγεται ότι θα είναι υποχρεωτικά και οι τρεις ίσοι με μηδέν.

Συνεπώς:

$$\alpha-\beta=\beta-\gamma=\alpha-\gamma=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$$

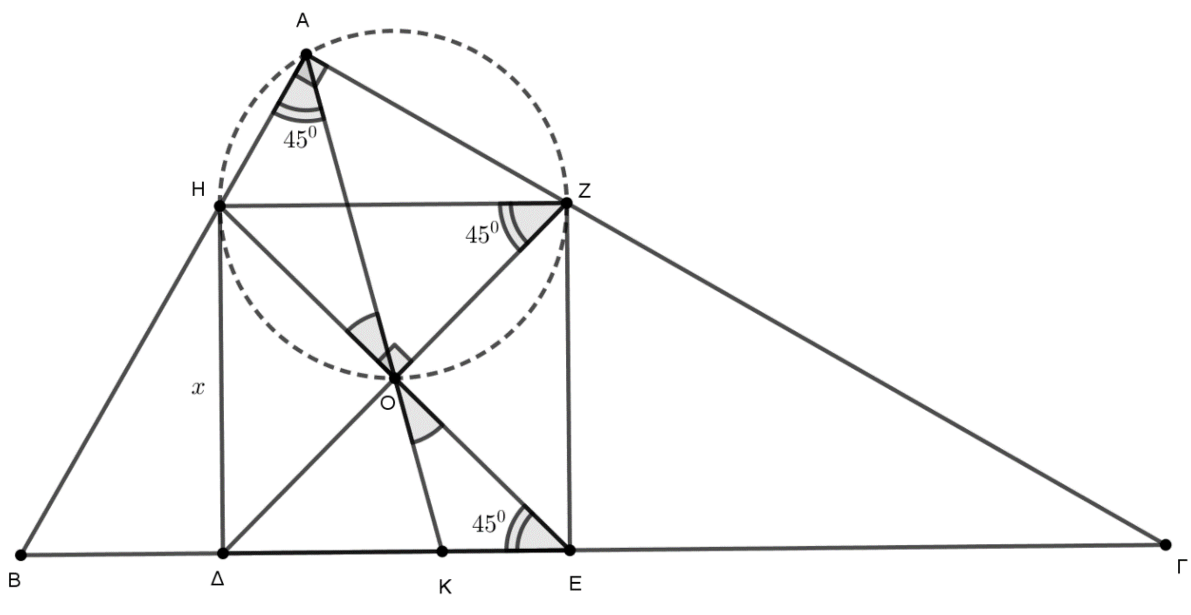
Άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\angle A=90^0)$. Στην υποτείνουσα $ΒΓ$ παίρνουμε σημεία $Δ, Ε$ με $ΒΔ < ΒΕ$ και στις κάθετες πλευρές $ΑΓ, ΑΒ$ σημεία $Ζ, Η$ αντίστοιχα, ώστε το $ΔΕΖΗ$ να είναι τετράγωνο, πλευράς x. Αν O είναι το κέντρο του τετραγώνου και η ευθεία AO τέμνει την υποτείνουσα $ΒΓ$ στο $Κ$, να αποδείξετε ότι

$$(OA)\cdot(OK)=\frac{x^2}{2}$$

__**Λύση**__



Είναι γνωστό ότι οι διαγώνιοι τετραγώνου τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.
Ο κύκλος διαμέτρου HZ περνά από τα σημεία A, O , αφού $\angle HAZ = \angle HOZ = 90^0$.
$\angle HAO = \angle HZO = 45^0$ (εγγεγραμμένες γωνίες, που βαίνουν ίδιο τόξο).
Επίσης, $\angle OEK = \angle\angle HE\Delta = 45^0$.
Από τα πιο πάνω έχουμε ότι $\angle HAO = \angle OEK$: (1).
Ακόμα, $\angle AOH = \angle KOE$ (κατακορυφήν γωνίες) : (2).
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΔAOK , ΔEOK είναι όμοια, απ' όπου έχουμε

$$\frac{(OA)}{(OE)} = \frac{(OH)}{(OK)} \Longrightarrow (OA) \cdot (OK) = (OE) \cdot (OH) : \quad (3)$$

Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα $(O\Delta) = (OE) = (OZ) = (OH)$
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta HO\Delta$ έχουμε

$$(OH)^2 + (O\Delta)^2 = (\Delta H)^2 \Longrightarrow 2(OH)^2 = x^2 \Longrightarrow (OH) = \frac{x}{\sqrt{2}} = (OE)$$

Τέλος,

$$(3) \Longrightarrow (OA) \cdot (OK) = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \boxed{(OA) \cdot (OK) = \frac{x^2}{2}}$$

Πρόβλημα 4
Να βρείτε όλες τις τριάδες (x, y, ω) πραγματικών αριθμών, που επαληθεύουν το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + \omega = 0 & (1) \\ xy\omega = -6 & (2) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{7}{6} & (3) \end{cases}$$

<u>Λύση</u>

Από τις (1) και (2) παίρνουμε $x + y = -\omega$ και $xy = -\frac{6}{\omega}$
Τότε η (3) γίνεται:

$$\frac{y\omega + \omega x + xy}{xy\omega} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{\omega(x + y) + xy}{-6} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \omega^2 + \frac{6}{\omega} = 7$$

Άρα, $\omega^3 - 7\omega + 6 = 0 \Leftrightarrow \omega^3 - \omega - 6\omega + 6 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega - 6) = 0$, απ' όπου $\omega = 1$ ή $\omega = 2$ ή $\omega = -3$ και παίρνουμε τις περιπτώσεις:

- $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6 \\ \omega = 1 \end{cases}$, απ' όπου $\boldsymbol{(x, y, \omega) = (2, -3, 1)}$ ή $\boldsymbol{(x, y, \omega) = (-3, 2, 1)}$
- $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -3 \\ \omega = 2 \end{cases}$, απ' όπου $\boldsymbol{(x, y, \omega) = (1, -3, 2)}$ ή $\boldsymbol{(x, y, \omega) = (-3, 1, 2)}$
- $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \\ \omega = -3 \end{cases}$, απ' όπου $\boldsymbol{(x, y, \omega) = (1, 2, -3)}$ ή $\boldsymbol{(x, y, \omega) = (2, 1, -3)}$

Συνεπώς οι ζητούμενες τριάδες $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\omega})$ είναι:

$$(\mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{1}), (-\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, -\mathbf{3}, \mathbf{2}), (-\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{3})$$