ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2021
Α′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 13/11/2021 Ώρα Εξέτασης: 15:00-17:00

Οδηγιες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1.

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \sqrt[3]{2} \quad \text{και} \quad B = \sqrt[10]{10}$$

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathit{\Gamma} = \frac{1}{4-\sqrt{15}} \quad \text{και} \quad \Delta = \sqrt{62}$$

Λύση:

(α) Έχουμε

$$A^3 = 2 \implies A^{30} = 2^{10} = 1024$$

και

$$B^{10} = 10 \implies B^{30} = 10^3 = 1000$$

Τότε $A^{30} > B^{30}$ και αφού $A, B > 0$ είναι και $A > B$.

(β) Έχουμε

$$\mathit{\Gamma} = \frac{1}{4-\sqrt{15}} = \frac{4+\sqrt{15}}{16-15} = 4+\sqrt{15}$$

Είναι

$$\mathit{\Gamma}^2 - \mathit{\Delta}^2 = (16 + 8\sqrt{15} + 15) - 62 = 8\sqrt{15} - 31$$

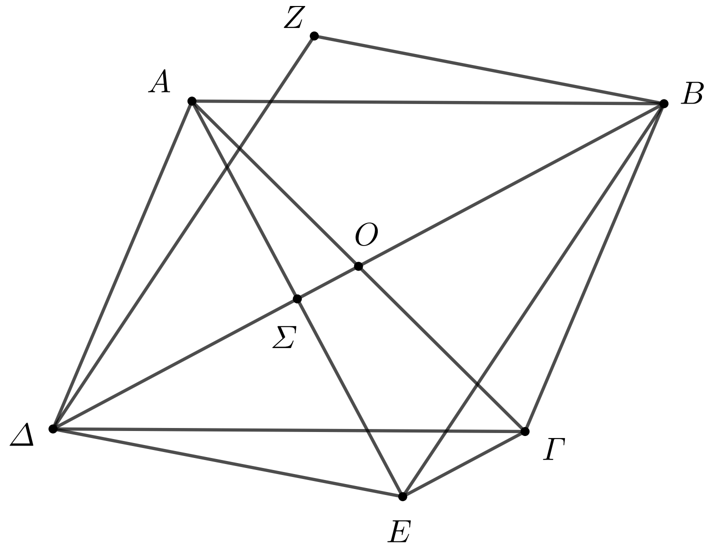
Όμως $(8\sqrt{15})^2 = 64 \cdot 15 = 960$ και $31^2 = 961$. Άρα $\mathit{\Gamma}^2 < \mathit{\Delta}^2$ και αφού $\mathit{\Gamma}, \mathit{\Delta} > 0$, τότε $\mathit{\Delta} > \mathit{\Gamma}$.

Πρόβλημα 2. Έστω παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και έστω $Ε$ και $Ζ$ τα συμμετρικά των $Α$ και $Γ$ αντίστοιχα ως προς τη διαγώνιο $ΒΔ$.

(α) Να δείξετε ότι το $ΒΓΕΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(β) Να δείξετε ότι το $ΒΕΔΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση:



(α) Έστω $Σ$ το σημείο τομής της $ΑΕ$ με τη $ΒΔ$ και $Ο$ το σημείο τομής των διαγωνίων $ΑΓ$ και $ΒΔ$.

Επειδή το $Ε$ είναι το συμμετρικό του $Α$ ως προς τη $ΒΔ$, τότε $ΑΣ = ΣΕ$ και επίσης η $ΔΣ$ είναι κάθετη στην $ΑΕ$. Η $ΔΣ$ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου $ΑΔΕ$, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΑΔ = ΔΕ$.

Στο τρίγωνο $ΑΕΓ$ τα $Σ$ και $Ο$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΕ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Άρα από το Θεώρημα του Θαλή η $ΣΟ$ είναι παράλληλη της $ΓΕ$.

Επομένως, αφού επιπλέον $ΕΔ = ΑΔ = ΒΓ$ το $ΒΓΕΔ$, είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Σημείωση: Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι $\angle ΔΒΓ = \angle ΒΔΑ = \angle ΒΔΕ$ και να το χρησιμοποιήσουμε αντί της ισότητας $ΕΔ = ΒΓ$. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τα $ΕΔ = ΒΓ$ και $\angle ΔΒΓ = \angle ΒΔΕ$ για να δείξουμε την παραλληλία.

(β) Με παρόμοιο τρόπο όπως στο (α) το $ΒΔΑΖ$ είναι επίσης ισοσκελές τραπέζιο. Έχουμε

$$ΕΔ = ΑΔ = ΒΓ = ΒΖ$$

και

$$ΒΕ = ΓΔ = ΑΒ = ΖΔ$$

αφού οι διαγώνιες ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες.

Άρα το $ΒΕΔΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Πρόβλημα 3. Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $\alpha - \beta = 3$ και $\alpha^3 - \beta^3 = 36$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$X = \alpha^5 - \frac{1}{\alpha^5}$$

Λύση: Έχουμε

$$36 = \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = 3(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

Άρα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 12$. Επίσης,

$$9 = (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Παίρνουμε λοιπόν

$$3 = 12 - 9 = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = 3\alpha\beta$$

Άρα $\alpha\beta = 1$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 12 - 1 = 11$.

Τώρα έχουμε

$$36 \cdot 11 = (\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^5 - \beta^5 + \alpha^2\beta^2(\alpha - \beta) = \alpha^5 - \frac{1}{\alpha^5} + 1 \cdot 3$$

Επομένως

$$\alpha^5 - \frac{1}{\alpha^5} = 36 \cdot 11 - 3 = 393$$

Σημείωση: Από τις $\alpha - \beta = 3$ και $\alpha\beta = 1$ παίρνουμε $\alpha - \frac{1}{\alpha} = 3$ που δίνει τη δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$ με λύσεις $\alpha = (3 \pm \sqrt{13})/2$. Τότε $1/\alpha = (-3 \pm \sqrt{13})/2$ αντίστοιχα. Μετά από (αρκετές) πράξεις μπορεί να ελεγχθεί ότι $\alpha^5 = (393 \pm 109\sqrt{13})/2$ και $1/\alpha^5 = (-393 \pm 109\sqrt{13})/2$ από τις οποίες πάλι προκύπτει το αποτέλεσμα.

Πρόβλημα 4.

(α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $48x^6 + x^2 - 1$ με το $4x^2 - 1$.

(β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ αν ισχύει ότι

$$\text{εφ}(B)\,\text{εφ}(\Gamma) = 1 \quad \text{και} \quad 4\sqrt{3}\,\text{ημ}(B)\,\text{συν}(\Gamma) = \text{σφ}(B)$$

Λύση:

(α)

$$\begin{array}{r|l}
48x^6 \qquad\qquad + x^2 - 1 & \qquad 4x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-48x^6 + 12x^4 \qquad\qquad & 12x^4 + 3x^2 + 1 \\ \hline
12x^4 + \ \ x^2 - 1 & \\
-12x^2 + 3x^2 \quad\ \ & \\ \hline
4x^2 - 1 & \\
-4x^2 + 1 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Άρα η διαίρεση έχει πηλίκο $12x^4 + 3x^2 + 1$ και υπόλοιπο 0.

(β) Έχουμε

$$\text{εφ}(B)\,\text{εφ}(\Gamma) = 1 \implies \text{εφ}(B) = \text{σφ}(\Gamma) = \text{εφ}(90^\circ - \Gamma) \implies B = 90^\circ - \Gamma \implies B + \Gamma = 90^\circ$$

Άρα $A = 90°$. Επίσης συν$(\varGamma) =$ συν$(90° - B) =$ ημ(B). Επομένως

$$4\sqrt{3}\,\text{ημ}^2(B) = \frac{\text{συν}(B)}{\text{ημ}(B)} \implies 4\sqrt{3}\,\text{ημ}^3(B) = \text{συν}(B) \implies 48\,\text{ημ}^6(B) = \text{συν}^2(B) = 1 - \text{ημ}^2(B)$$

Θέτουμε $x =$ ημ(B). Τότε

$$0 = 48x^6 + x^2 - 1 = (4x^2 - 1)(12x^4 + 3x^2 + 1) = (2x - 1)(2x + 1)(12x^4 + 3x^2 + 1)$$

Αφού $x > 0$, τότε $2x + 1 > 0$ και $12\omega^2 + 3\omega + 1 > 0$. Συνεπώς ημ$(B) = x = \frac{1}{2}$ που δίνει $B = 30°$ και $\varGamma = 60°$.