ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2021
Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 13/11/2021 Ώρα Εξέτασης: 15:00-17:00

Οδηγιες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{4-\sqrt{3-x}}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(β) Να δείξετε ότι αν τα α,β ανήκουν στο A με $\alpha<\beta$, τότε $f(\alpha)<f(\beta)$.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Λύση:

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} x\in A &\iff 3-x\geqslant 0 \quad \text{και} \quad 4-\sqrt{3-x}\geqslant 0\\ &\iff x\leqslant 3 \quad \text{και} \quad \sqrt{3-x}\leqslant 4\\ &\iff x\leqslant 3 \quad \text{και} \quad 3-x\leqslant 16\\ &\iff -13\leqslant x\leqslant 3 \end{aligned}$$

Δηλαδή $A=[-13,3]$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha<\beta &\implies -\alpha>-\beta\\ &\implies 3-\alpha>3-\beta\\ &\implies \sqrt{3-\alpha}>\sqrt{3-\beta}\\ &\implies -\sqrt{3-\alpha}<-\sqrt{3-\beta}\\ &\implies 4-\sqrt{3-\alpha}<4-\sqrt{3-\beta}\\ &\implies f(\alpha)<f(\beta) \end{aligned}$$

(γ) Για $x\in A$ έχουμε $f(-13)\leqslant f(x)\leqslant f(3) \implies 0\leqslant f(x)\leqslant 2$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,2]$ αφού για $y\in[0,2]$ έχουμε

$$\begin{aligned} y=\sqrt{4-\sqrt{3-x}} &\iff y^2=4-\sqrt{3-x}\\ &\iff \sqrt{3-x}=4-y^2\\ &\iff 3-x=(4-y^2)^2\\ &\iff x=3-(4-y^2)^2 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.

(α) Να δείξετε ότι

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2\nu - 1)^2 - (2\nu)^2 = -\nu(2\nu + 1), \quad \nu \in \mathbb{N}$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 2021^2$$

Λύση

(α) Για $\nu = 1$ η πρόταση είναι αληθής αφού $1^2 - 2^2 = 1 - 4 = -3$ και $-1(2\cdot 1 + 1) = -1\cdot 3 = -3$. Έστω ότι η πρόταση αληθεύει για $\nu = \kappa$. Δηλαδή

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2\kappa - 1)^2 - (2\kappa)^2 = -\kappa(2\kappa + 1) \tag{1}$$

Θα δείξουμε ότι η πρόταση αληθεύει για $\nu = \kappa + 1$. Δηλαδή

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2(\kappa + 1) - 1)^2 - (2(\kappa + 1))^2 = -(\kappa + 1)(2(\kappa + 1) + 1) \tag{2}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2(\kappa + 1) - 1)^2 - (2(\kappa + 1))^2 \\
&= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2\kappa + 1)^2 - (2\kappa + 2))^2 \\
&= \left[1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2\kappa - 1)^2 - (2\kappa)^2\right] + (2\kappa + 1)^2 - (2\kappa + 2))^2 \\
&= -\kappa(2\kappa + 1) + (2\kappa + 1)^2 - (2\kappa + 2))^2 \quad \text{(Από την (1))} \\
&= -2\kappa^2 - \kappa + ((2\kappa + 1) - (2\kappa + 2))((2\kappa + 1) + (2\kappa + 2)) \\
&= -2\kappa^2 - \kappa - 4\kappa - 3 \\
&= -(2\kappa^2 + 5\kappa + 3) \\
&= -(\kappa + 1)(2\kappa + 3) \\
&= -(\kappa + 1)(2(\kappa + 1) + 1)
\end{aligned}$$

Συνεπώς η πρόταση είναι αληθής για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $(2\kappa - 1)^2 - (2\kappa)^2 = -(4\kappa - 1)$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\begin{aligned}
&1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2\nu - 1)^2 - (2\nu)^2 \\
&= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \cdots + \left[(2\nu - 1)^2 - (2\nu)^2\right] \\
&= -(3 + 7 + 11 + \cdots + (4\nu - 1)) \\
&= -\frac{\nu(3 + (4\nu - 1))}{2} = -\nu(2\nu + 1)
\end{aligned}$$

(β) Έχουμε

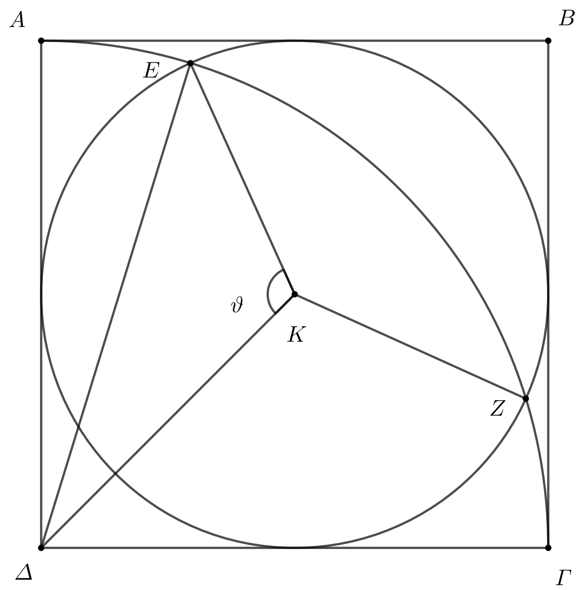
$$\begin{aligned}
S &= (1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 2021^2 - 2022^2) + 2022^2 \\
&= -1011(2 \cdot 1011 + 1) + 2022^2 \quad (\nu = 1011) \\
&= -1011 \cdot 2023 + 1011 \cdot 4044 \\
&= 1011 \cdot 2021 \\
&(= 2021000 + 20210 + 2021 = 2043231)
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 3. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και κύκλος (K,R) με κέντρο K και ακτίνα R ο οποίος εφάπτεται στις πλευρές του τετραγώνου. Ο κύκλος με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔA τέμνει τον κύκλο (K,R) στα σημεία E και Z. Αν το μήκος του EZ είναι $\sqrt{7}$, τότε

(α) Να δείξετε ότι συν $\left(\widehat{\Delta KE}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (K,R).

Λύση:



(α) Αφού ο κύκλος έχει ακτίνα R και εφάπτεται του τετραγώνου, τότε το τετράγωνο έχει μήκος πλευράς $2R$.

Στο τρίγωνο ΔEK έχουμε $\Delta E = \Delta A = 2R, EK = R$ και $\Delta K = \frac{1}{2}\Delta B = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta A = \sqrt{2}R$. Θέτουμε $\vartheta = \angle \Delta KE$. Από τον Νόμο των Συνημιτόνων έχουμε

$$\text{συν}\,(\vartheta) = \frac{(\Delta K)^2 + (EK)^2 - (\Delta E)^2}{2(\Delta K)(EK)} = \frac{(2+1-4)R^2}{2\sqrt{2}R^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(β) Επειδή $\angle EKZ = 360° - 2\vartheta$, τότε

$$\text{συν}\left(\widehat{EKZ}\right) = \text{συν}(2\vartheta) = 2\,\text{συν}^2(\vartheta) - 1 = \frac{2}{8} - 1 = -\frac{3}{4}$$

Άρα πάλι από τον Νόμο των Συνημιτόνων, στο τρίγωνο EKZ αυτή τη φορά, έχουμε

$$-\frac{3}{4} = \text{συν}\left(\widehat{EKZ}\right) = \frac{(EK)^2 + (KZ)^2 - (EZ)^2}{2(EK)(KZ)} = \frac{2R^2 - 7}{2R^2}$$

Επομένως $-6R^2 = 8R^2 - 28$ που δίνει $R^2 = 2$.

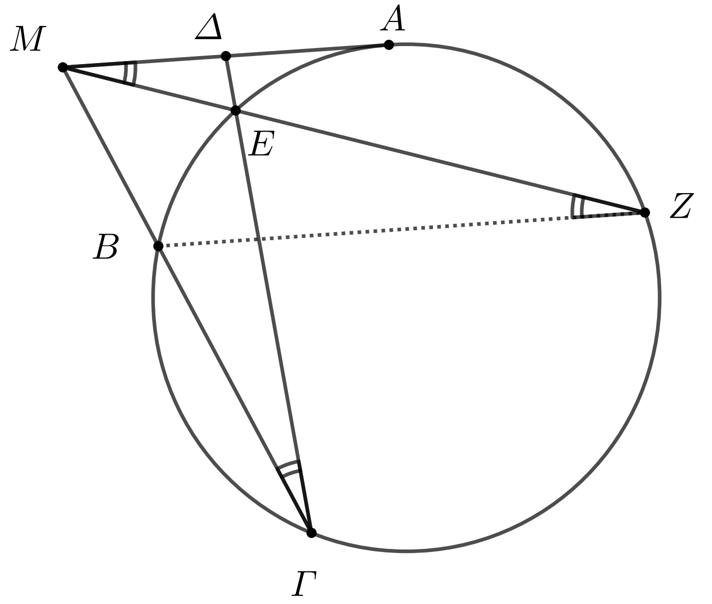
Άρα το εμβαδόν του κύκλου ισούται με 2π.

Πρόβλημα 4. Δίνεται κύκλος (K), σημεία του κύκλου A,B,Γ καθώς και σημείο M εξωτερικά του κύκλου τέτοιο, ώστε η MA είναι εφαπτομένη στον κύκλο και τα M,B,Γ είναι συνευθειακά. Έστω Δ το μέσο του AM. Αν η $\Gamma\Delta$ τέμνει τον (K) στο E και η ME τέμνει τον (K) στο Z, να δείξετε ότι

(α) $\angle\Delta ME = \angle\Delta\Gamma M$

(β) Η BZ είναι παράλληλη της MA

Λύση:



(α) Το ΔA είναι εφαπτόμενο τμήμα και η $\Delta E\Gamma$ είναι τέμνουσα του κύκλου. Επομένως ισχύει ότι $\Delta A^2 = (\Delta E)(\Delta\Gamma)$. Όμως είναι $\Delta M = \Delta A$, οπότε $\Delta M^2 = (\Delta E)(\Delta\Gamma)$. Αυτό μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{\Delta M}{\Delta E} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta M}$$

Επομένως τα τρίγωνα ΔME και $\Delta\Gamma M$ είναι όμοια επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες $\widehat{M\Delta E}$ και $\widehat{M\Delta\Gamma}$ ίσες.

Έτσι $\angle\Delta ME = \angle\Delta\Gamma M$.

(β) Έχουμε ότι $\angle E\Gamma B = \angle EZB$ αφού οι δύο γωνίες βαίνουν στο ίδιο τόξο EB. Από το (α) παίρνουμε

$$\angle\Delta MZ = \angle\Delta ME = \angle\Delta\Gamma M = \angle E\Gamma B = \angle EZB = \angle MZB$$

Άρα η BZ είναι παράλληλη της MA.