



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2021
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 13/11/2021 Ώρα Εξέτασης: 15:00-17:00

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{3 - x}}$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Πρόβλημα 2. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ και έστω συνάρτηση $f_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_\nu(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+\nu)$$

Να δείξετε ότι

$$f'_\nu(1) = (\nu+1)! \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu+1} \right)$$

Πρόβλημα 3. Έστω συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$$

Πρόβλημα 4. Δίνεται κύκλος (K) , σημεία του κύκλου A, B, Γ καθώς και σημείο M εξωτερικά του κύκλου τέτοιο, ώστε η MA είναι εφαπτομένη στον κύκλο και τα M, B, Γ είναι συνευθειακά. Έστω Δ το μέσο του AM . Αν η $\Gamma\Delta$ τέμνει τον (K) στο E και η ME τέμνει τον (K) στο Z , να δείξετε ότι

- (α) $\angle \Delta ME = \angle \Delta \Gamma M$
- (β) Η BZ είναι παράλληλη της MA
- (γ) Αν επιπλέον ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου MBE περνάει από το Δ , να δείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Delta$ περνάει από το κέντρο του (K) .