ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2021
Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 13/11/2021 Ώρα Εξέτασης: 15:00-17:00

Οδηγιες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{4-\sqrt{3-x}}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Λύση:

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} x\in A &\iff 3-x\geqslant 0 \quad \text{και} \quad 4-\sqrt{3-x}\geqslant 0\\ &\iff x\leqslant 3 \quad \text{και} \sqrt{3-x}\leqslant 4\\ &\iff x\leqslant 3 \quad \text{και} 3-x\leqslant 16\\ &\iff -13\leqslant x\leqslant 3\end{aligned}$$

Δηλαδή $A=[-13{,}3]$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha<\beta &\implies -\alpha>-\beta\\ &\implies 3-\alpha>3-\beta\\ &\implies \sqrt{3-\alpha}>\sqrt{3-\beta}\\ &\implies -\sqrt{3-\alpha}<-\sqrt{3-\beta}\\ &\implies 4-\sqrt{3-\alpha}<4-\sqrt{3-\beta}\\ &\implies f(\alpha)<f(\beta)\end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Εναλλακτικά, ορίζουμε τη συνάρτηση $g:(-\infty,3]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{3-x}$. Τότε $f(x)=\sqrt{4-g(x)}$ και για $x\in(-13{,}3)$ έχουμε

$$f'(x)=-\frac{g'(x)}{2\sqrt{4-\sqrt{3-x}}}=\frac{1}{4\sqrt{3-x}\sqrt{4-\sqrt{3-x}}}>0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-13{,}3]$ (ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων) και παραγωγίσιμη στο $(-13{,}3)$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-13{,}3)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(γ) Για $x \in A$ έχουμε $f(-13) \leqslant f(x) \leqslant f(3) \implies 0 \leqslant f(x) \leqslant 2$. Το σύνολο τιμών της f είναι το [0,2] αφού για $y \in [0,2]$ έχουμε

$$\begin{aligned} y = \sqrt{4-\sqrt{3-x}} &\iff y^2 = 4-\sqrt{3-x} \\ &\iff \sqrt{3-x} = 4-y^2 \\ &\iff 3-x = (4-y^2)^2 \\ &\iff x = 3-(4-y^2)^2 \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, αφού η f είναι αύξουσα, τότε έχει ελάχιστη τιμή το $f(-13)=0$ και μέγιστη τιμή το $f(3)=2$. Αφού επιπλέον είναι συνεχής, τότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών το σύνολο τιμών της είναι το [0,2].

Πρόβλημα 2. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ και έστω συνάρτηση $f_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_\nu(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+\nu)$$

Να δείξετε ότι

$$f'_\nu(1) = (n+1)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$$

Λύση: Για $\nu=1$ η πρόταση είναι αληθής αφού $f_1(x)=x+1$, άρα $f'(x)=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $f'_1(1) = 1 = (1+1)! \cdot \frac{1}{2}$.

Έστω ότι η πρόταση αληθεύει για $\nu=\kappa$. Δηλαδή

$$f'_\kappa(1) = (\kappa+1)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\kappa+1}\right) \tag{1}$$

Θα δείξουμε ότι η πρόταση αληθεύει για $\nu=\kappa+1$. Δηλαδή

$$f'_{\kappa+1}(1) = (\kappa+2)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\kappa+2}\right) \tag{2}$$

Παρατηρούμε ότι $f_{\kappa+1}(x) = f_\kappa(x)(x+\kappa+1)$. Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε

$$f'_{\kappa+1}(x) = f'_\kappa(x)(x+\kappa+1) + f_\kappa(x)$$

Άρα

$$\begin{aligned} f'_{\kappa+1}(1) &= (\kappa+2)f'_\kappa(1) + f_\kappa(1) \\ &= (\kappa+2)\cdot(\kappa+1)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\kappa+1}\right) + 2\cdot 3\cdots(\kappa+1) \\ &= (\kappa+2)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\kappa+1}\right) + (\kappa+1)! \\ &= (\kappa+2)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\kappa+1}\right) + \frac{(\kappa+2)!}{\kappa+2} \\ &= (\kappa+2)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\kappa+2}\right) \end{aligned}$$

Συνεπώς η πρόταση είναι αληθής για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Εναλλακτικά ορίζουμε τη συνάρτηση $g_\nu : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g_\nu(x) = \ln(f_\nu(x))$. Η συνάρτηση είναι καλώς ορισμένη αφού $f(x) > 0$ για $x > 0$. Έχουμε

$$g_\nu(x) = \ln(x+1) + \ln(x+2) + \cdots + \ln(x+\nu)$$

Τότε η g_ν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$ με τύπο

$$g'_\nu(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+\nu}$$

Επομένως

$$g'_\nu(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu+1}$$

Από την άλλη, αφού $g(x) = \ln(f(x))$ και η f είναι επίσης παραγωγίσιμη, τότε

$$g'_\nu(x) = \frac{f'_\nu(x)}{f_\nu(x)}$$

για κάθε $x > 0$. Συνεπώς

$$f'_\nu(1) = f_\nu(1)g_\nu(1) = (\nu+1)!\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu+1}\right)$$

Πρόβλημα 3. Έστω συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$$

Λύση: Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)f(x)$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g(\alpha) = g(\beta) = 0$. Άρα από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$. Έχουμε

$$g'(x) = [(x-\beta) + (x-\alpha)]f(x) + (x-\alpha)(x-\beta)f'(x)$$

Άρα

$$\begin{aligned}
&0 = g'(\xi) = [(\xi-\beta) + (\xi-\alpha)]f(\xi) + (\xi-\alpha)(\xi-\beta)f'(\xi) \\
\implies\ &(\xi-\alpha)(\xi-\beta)f'(\xi) = [(\beta-\xi) + (\alpha-\xi)]f(\xi) \\
\implies\ &\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{(\beta-\xi) + (\alpha-\xi)}{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\xi} + \frac{1}{\beta-\xi}
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 4. Δίνεται κύκλος (K), σημεία του κύκλου A,B,Γ καθώς και σημείο M εξωτερικά του κύκλου τέτοιο, ώστε η MA είναι εφαπτομένη στον κύκλο και τα M,B,Γ είναι συνευθειακά. Έστω Δ το μέσο του AM. Αν η $\Gamma\Delta$ τέμνει τον (K) στο E και η ME τέμνει τον (K) στο Z, να δείξετε ότι

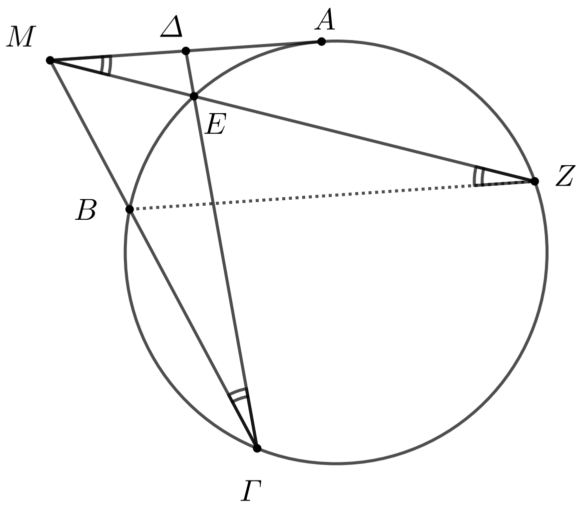
(α) $\angle \Delta ME = \angle \Delta\Gamma M$

(β) Η BZ είναι παράλληλη της MA

(γ) Αν επιπλέον ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου MBE περνάει από το Δ, να δείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Delta$ περνάει από το κέντρο του (K).

Λύση:

(α) Το ΔA είναι εφαπτόμενο τμήμα και η $\Delta E\Gamma$ είναι τέμνουσα του κύκλου. Επομένως



ισχύει ότι $\Delta A^2 = (\Delta E)(\Delta\Gamma)$. Όμως είναι $\Delta M = \Delta A$, οπότε $\Delta M^2 = (\Delta E)(\Delta\Gamma)$. Αυτό μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{\Delta M}{\Delta E} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta M}$$

Επομένως τα τρίγωνα ΔME και $\Delta\Gamma M$ είναι όμοια επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες $\widehat{M\Delta E}$ και $\widehat{M\Delta\Gamma}$ ίσες.

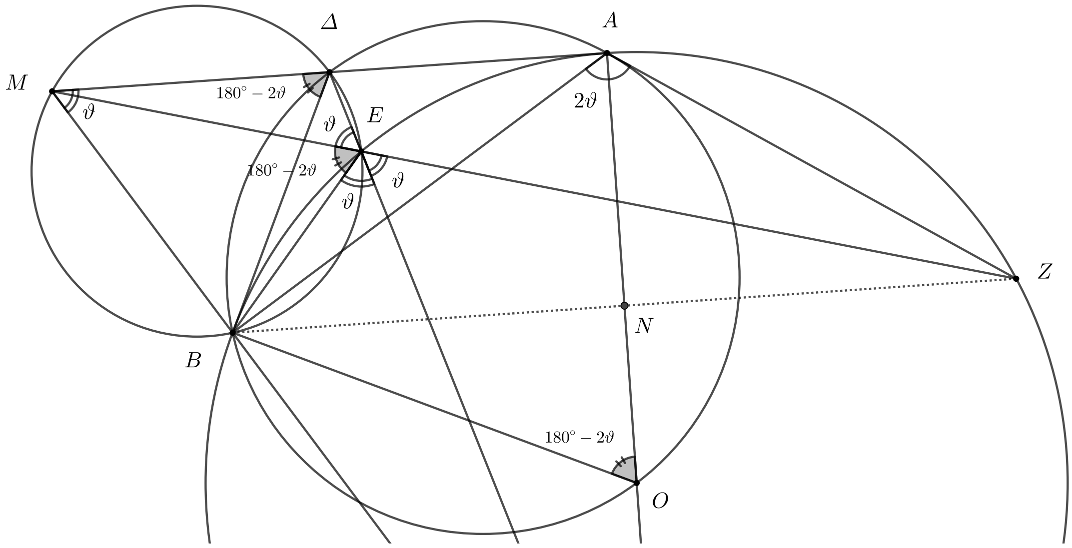
Έτσι $\angle\Delta ME = \angle\Delta\Gamma M$.

(β) Έχουμε ότι $\angle E\Gamma B = \angle EZB$ αφού οι δύο γωνίες βαίνουν στο ίδιο τόξο EB. Από το (α) παίρνουμε

$$\angle\Delta MZ = \angle\Delta ME = \angle\Delta\Gamma M = \angle E\Gamma B = \angle EZB = \angle MZB$$

Άρα η BZ είναι παράλληλη της MA.

(γ) Γράφουμε $\vartheta = \angle BE\Gamma$. Επειδή το τετράπλευρο ΔEBM είναι εγγράψιμο, έχουμε $\angle\Delta MB = \angle BE\Gamma = \vartheta$. Από τη λύση του (α) τα τρίγωνα ΔME και $\Delta\Gamma M$ είναι όμοια οπότε $\angle\Delta EM = \angle\Delta MB = \vartheta$. Άρα και $\angle\Gamma EZ = \vartheta$ ως κατά κορυφήν. Τότε $\angle BAZ = \angle BEZ = 2\vartheta$.



Έστω N το μέσο της BZ και έστω O το κέντρο του (K). Η AO είναι κάθετη στη AM (αφού AM εφαπτομένη) άρα είναι κάθετη και στη BZ αφού είναι παράλληλη της

AM. Αφού η AO είναι κάθετη στη BZ και το O είναι κέντρο του κύκλου, τότε η AO περνά από το N. Η AN είναι και κάθετη και διάμεσος του τριγώνου ABZ επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = AZ$.

Τότε θα έχουμε $\angle AZB = \frac{180^\circ - 2\vartheta}{2} = 90^\circ - \vartheta$. Επομένως $\angle AOB = 180^\circ - 2\vartheta$ ως επίκεντρη.

Έχουμε επίσης $\angle M\Delta B = \angle MEB = 180^\circ - \angle BEZ = 180^\circ - 2\vartheta = \angle AOB$. Αφού λοιπόν $\angle M\Delta B = \angle AOB$, τότε το O ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Delta$.

Συνεπώς
$$\angle BE\Gamma = \angle \Delta MB = \angle M\Delta E = \angle \Gamma EZ$$

Τότε τα τόξα $B\Gamma$ και ΓZ είναι ίσα, επομένως το Γ είναι το μέσο του τόξου BZ. Τότε το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές με $B\Gamma = \Gamma Z$.

Έστω N το μέσο της BZ. Η διάμεσος ΓN είναι και ύψος του τριγώνου, οπότε $\Gamma N \perp BZ$. Αν όμως O το κέντρο του (K), τότε ισχύει επίσης ότι $ON \perp BZ$. Άρα τα O,Γ,N είναι συνευθειακά.