ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Γ' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 9/04/2016 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: Να βρείτε όλες τις τριάδες (x, y, z) των θετικών ακεραίων οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση

$$2^x + 3^y = 6^z - 1$$

Λύση:

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται

$$2^x + 3^y = 6^z - 1 \text{ ή } 2^x = 6^z - 1 - 3^y$$

Παίρνοντας $(mod3)$ θα έχουμε

$$2^x \equiv -1mod3 \equiv 2mod3$$

Δηλαδή, $2^x = 2 + 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$. Για το πρώτο μέλος θα έχουμε. Αν x $άρτιος$, έστω $x = 2\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε

$$2^x \equiv 4^\kappa = (1+3)^\kappa = 1 + 3\mu, \qquad \mu \in \mathbb{Z}$$

Αν x $περττός$, έστω $x = 2\kappa + 1,\ \kappa \in \mathbb{Z}$, τότε θα έχουμε

$$2^x \equiv 2 \cdot 4^\kappa = 2 \cdot (1+3)^\kappa = 2 + 3\mu, \qquad \mu \in \mathbb{Z}$$

Επομένως ο x είναι περιττός.

- Αν $x = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται

  $$6^z = 3^y + 3 = 3(3^{y-1} + 1)$$

  Το δεξιό μέλος της τελευταίας εξίσωσης διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 3^2, ενώ από την άλλη μεριά το $6^z = 2^z 3^z$ διαιρείται με το 3^z και επομένως συμπεραίνουμε ότι $z = 1$. Επομένως $6 = 3^y + 3 \implies y = 1$. Άρα μια λύση είναι η τριάδα

  $$(x, y, z) = (1,1,1)$$

- Αν $x \geq 3$ τότε

  $$2^x + 3^y + 1 \equiv \begin{cases} 4mod8, & αν \quad y - περιττός \\ 2mod8, & αν \quad y - άρτιος \end{cases}$$

  Από την άλλη μεριά

  $$6^z \equiv \begin{cases} 6mod8 & αν \quad z = 1 \\ 4mod8 & αν \quad z = 2 \\ 0mod8 & αν \quad z \geq 3 \end{cases}$$

Επομένως, βλέπουμε ότι τα δύο μέλη ταυτίζονται $mod8$, όταν $y - περιττός$ και $z = 2$

Τότε έχουμε

$$2^x < 2^x + 3^y + 1 = 6^2 = 36$$

και αφού x ≥ 3 περιττός, οι μόνες δυνατές επιλογές θα είναι x = 3 ή x = 5. Ελέγχοντας θα έχουμε τις λύσεις

$$(x, y, z) = (3,3,2) \text{ ή } (5,1,2)$$

<u>Πρόβλημα 2:</u> Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

i. $f(-x) = -f(x),\ \ για\ όλους\ τους\ πραγματικούς\ αριθμούς\ x$
ii. $f(x+1) = f(x) + 1, για\ όλους\ τους\ πραγματικούς\ αριθμούς\ x$
iii. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}\ \ για\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0.$

<u>Λύση:</u>
Θέτοντας $x = 0$ στην (i) θα πάρουμε

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

και η ιδιότητα (ii) γίνεται

$$f(1) = f(0) + 1 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Από την (ii) με επαγωγή για $\nu \in \mathbb{N}$ θα έχουμε

$$\begin{gathered} f(2) = f(1) + 1 \\ f(3) = f(2) + 1 \\ \vdots \\ f(\nu) = f(\nu - 1) + 1 \end{gathered}$$

Προσθέτοντας θα πάρουμε

$$f(\nu) = f(1) + \nu - 1 \Leftrightarrow f(\nu) = \nu,\ \ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Από την (i) τότε θα έχουμε

$$f(-\nu) = -f(\nu) = -\nu.$$

Επομένως,

$$f(\nu) = \nu,\ \ \forall \nu \in \mathbb{Z}.$$

Θεωρούμε $x + \frac{1}{x},\ \ \forall x \neq 0\ \ και\ x \neq -1$. Τότε από την (ii) $και$ (iii) θα έχουμε

$$f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{f(x)}{x^2} \qquad (1)$$

Από την άλλη μεριά, γράφουμε

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} = \frac{1}{\frac{x}{1+x}}$$

και από την (iii) έχουμε

$$f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{x}{1+x}}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \qquad (2)$$

Έχουμε επίσης

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = f\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{f(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 - f(x)}{(x+1)^2}$$

Άρα ,

$$f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{(x+1)^2 - 1 - f(x)}{(x+1)^2}$$

Και τότε η (2) μας δίνει

$$f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{(x+1)^2-1-f(x)}{x^2}$$

και συγκρίνοντας με την (1) παίρνουμε

$$\frac{(x+1)^2-1-f(x)}{x^2}=1+\frac{f(x)}{x^2}\Longrightarrow f(x)=x, \qquad \forall x\neq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \; x\neq -1$$

Όμως , $f(0)=0 \; \kappa\alpha\iota \; f(-1)=-f(1)=-1$, άρα

$$f(x)=x, \;\; \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 3: Να βρείτε τον μικρότερο περιττό ακέραιο ν έτσι ώστε κάποιο $\nu-\gamma\omega\nu o$ (όχι απαραίτητα κυρτό) να μπορεί να χωριστεί σε παραλληλόγραμμα των οποίων τα εσωτερικά τους μέρη να μην αλληλοκαλύπτονται.

Λύση:

Έστω ότι έχουμε ένα πολύγωνο $\mathcal{F}$. Διαλέγουμε μια οποιαδήποτε πλευρά του $\mathcal{F}$ έστω AB και το προσανατολίζουμε έτσι ώστε η πλευρά αυτή να είναι οριζόντια και στην βάση του πολυγώνου. Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{F}$ διαμερίζεται σε παραλληλόγραμμα. Τότε τουλάχιστον ένα από τα παραλληλόγραμμα αυτά θα έχει πλευρά παράλληλη προς την AB, επειδή ένα τέτοιο παραλληλόγραμμο θα καλύπτει την πλευρά AB του $\mathcal{F}$.

Επιλέγουμε από τα παραλληλόγραμμα με πλευρά παράλληλη του AB εκείνο το παραλληλόγραμμο $\mathcal{M}$ που έχει πλευρά $\Gamma\Delta \parallel AB$ την ψηλότερη δυνατή από την AB. Αν η πάνω πλευρά $\Gamma\Delta$ του $\mathcal{M}$ δεν καλύπτεται από μια πλευρά του πολυγώνου $\mathcal{F}$, τότε κάποιο άλλο παραλληλόγραμμο θα βρίσκεται κάτω από το $\mathcal{M}$ και με την πλευρά του $\Gamma\Delta$ θα καλύπτεται μια πλευρά του πολυγώνου $\mathcal{F}$, άτοπο από τον ορισμό του $\mathcal{M}$. Άρα κάποια άλλη πλευρά του πολυγώνου είναι παράλληλη προς την AB.

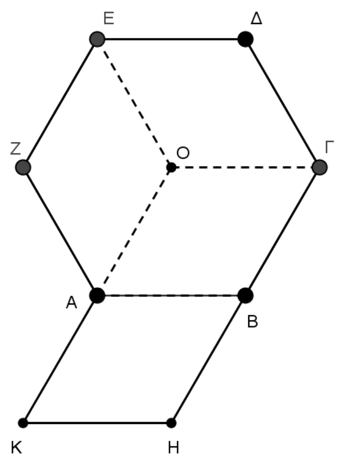
Με άλλα λόγια, δεδομένης μιας πλευρά AB του πολυγώνου, κάποια άλλη πλευρά του πολυγώνου είναι παράλληλη με αυτήν.

Προφανώς αυτό είναι αδύνατο για $\nu=3$.

Τώρα αν κάποιο πεντάγωνο έχει αυτή την ιδιότητα τότε δύο από τις πλευρές του θα είναι παράλληλες ενώ οι υπόλοιπες τρείς πρέπει να είναι ανά ζεύγη παράλληλες. Αλλά κάποιες δύο από την τριάδα των παράλληλων πλευρών πρέπει να είναι διαδοχικές για να σχηματίζεται πεντάγωνο, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως δεν υπάρχει τέτοια διαμέριση για $\nu=5$.

Ο μικρότερος περιττός για τον οποίο ισχύει το πρόβλημα είναι $\nu=7$. Μια κατασκευή ενός τέτοιου επταγώνου είναι η παρακάτω.

Παίρνουμε ένα κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ με O το κέντρο του. Έστω K το συμμετρικό του O ως προς το A και έστω H το συμμετρικό του Γ ως προς το B. Τότε το μη κυρτό επτάγωνο $AKH\Gamma\Delta EZ$ μπορεί να χωριστεί στα παραλληλόγραμμα $ABHK, AB\Gamma O, \Gamma\Delta EO \; \kappa\alpha\iota \; EZAO$.



Πρόβλημα 4: Τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (ω) με κέντρο O , $\angle B=\angle\Delta=90°$ και $AB=A\Delta<B\Gamma$.Έστω X σημείο του $B\Delta$. Η ευθεία AX τέμνει ξανά τον κύκλο (ω) στο σημείο Σ διαφορετικό από το A. Από το σημείο X φέρουμε κάθετη στην $A\Sigma$ η οποία τέμνει το τόξο $A\Delta\Gamma$ στο σημείο T. Αν M, Z τα μέσα των τμημάτων $\Sigma T, AO$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $BZ=ZM$.

Λύση:

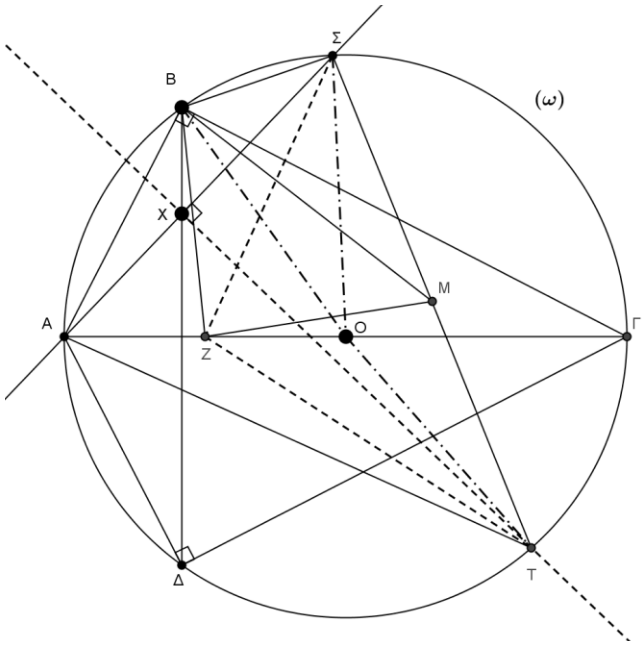
Εφαρμόζοντας το πρώτο θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ΔABO θα έχουμε

$AB^2 + \rho^2 = 2BZ^2 + \frac{\rho^2}{2} \Leftrightarrow$

$$4BZ^2 = 2AB^2 + \rho^2 \qquad (1).$$

όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (ω).

Επίσης, εφαρμόζοντας το ίδιο θεώρημα στα τρίγωνα $\varDelta\Sigma ZT$, $\varDelta A\Sigma O$ και $\varDelta ATO$, παίρνουμε



$$\Sigma Z^2 + ZT^2 = 2ZM^2 + \frac{\Sigma T^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$4ZM^2 = 2\Sigma Z^2 + 2ZT^2 - \Sigma T^2 \qquad (2)$$

και

$$\Sigma A^2 + \rho^2 = 2\Sigma Z^2 + \frac{\rho^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\Sigma Z^2 = \Sigma A^2 + \frac{\rho^2}{2} \qquad (3)$$

και

$$AT^2 + \rho^2 = 2TZ^2 + \frac{\rho^2}{2} \Leftrightarrow 2TZ^2 = AT^2 + \frac{\rho^2}{2} \qquad (4)$$

Προσθέτοντας τις (2), (3) και (4) θα έχουμε

$$4ZM^2 = \Sigma A^2 + AT^2 - \Sigma T^2 + \rho^2 \qquad (5)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (5) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Sigma A^2 + AT^2 - \Sigma T^2 = 2AB^2 \qquad (6)$$

Επειδή ισχύει από την υπόθεση $XT \perp A\Sigma$ θα έχουμε

$$TA^2 - T\Sigma^2 = XA^2 - X\Sigma^2 \Leftrightarrow TA^2 - T\Sigma^2 = (XA + X\Sigma)(XA - X\Sigma) \text{ ή}$$

$$TA^2 - T\Sigma^2 = A\Sigma(XA - X\Sigma)$$

Επομένως το πρώτο μέλος της (6) γίνεται

$$\Sigma A^2 + AT^2 - \Sigma T^2 = \Sigma A^2 + A\Sigma(XA - X\Sigma) = \Sigma A^2 + A\Sigma[XA - (A\Sigma - XA)]$$

$$= A\Sigma^2 + A\Sigma(2XA - A\Sigma) = A\Sigma^2 + 2A\Sigma \cdot XA - A\Sigma^2 = 2A\Sigma \cdot XA.$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$2AB^2 = 2A\Sigma \cdot XA \text{ ή } AB^2 = A\Sigma \cdot XA$$

Όμως επειδή, $\angle A\Sigma B = \angle A\varDelta B = \angle AB\varDelta$ και $\angle BA\Sigma$ κοινή γωνία των τριγώνων $\varDelta AB\Sigma$ και $\varDelta AXB$, παίρνουμε

$$\varDelta AB\Sigma \approx \varDelta AXB \Longrightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{A\Sigma}{AB} \Longrightarrow AB^2 = A\Sigma \cdot XA$$

Επομένως, $BZ = ZM$.