



# ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Γ' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 9/04/2016

Ωρα εξέτασης: 10:00-14:30

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**Πρόβλημα 1:** Να βρείτε όλες τις τριάδες  $(x, y, z)$  των θετικών ακεραίων οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση

$$2^x + 3^y = 6^z - 1$$

**Πρόβλημα 2:** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες ώστε:

- i.  $f(-x) = -f(x)$ , για όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $x$
- ii.  $f(x + 1) = f(x) + 1$ , για όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $x$
- iii.  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$  για  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ .

**Πρόβλημα 3:** Να βρείτε τον μικρότερο περιττό ακέραιο  $n$  έτσι ώστε κάποιο  $n$ -γωνο (όχι απαραίτητα κυρτό) να μπορεί να χωριστεί σε παραλληλόγραμμα των οποίων τα εσωτερικά τους μέρη να μην αλληλοκαλύπτονται.

**Πρόβλημα 4:** Τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(\omega)$  με κέντρο  $O$ ,  $\angle B = \angle \Delta = 90^\circ$  και  $AB = AD < B\Gamma$ . Έστω  $X$  σημείο του  $B\Delta$ . Η ευθεία  $AX$  τέμνει ξανά τον κύκλο  $(\omega)$  στο σημείο  $\Sigma$  διαφορετικό από το  $A$ . Από το σημείο  $X$  φέρουμε κάθετη στην  $A\Sigma$  η οποία τέμνει το τόξο  $A\Delta\Gamma$  στο σημείο  $T$ . Αν  $M, Z$  τα μέσα των τμημάτων  $\Sigma T, AO$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $BZ = ZM$ .