



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Γ' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 29/04/2017

Ωρα εξέτασης: 10:00-14:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: Να βρείτε τον μεγαλύτερο θετικό ακέραιο n ο οποίος διαιρεί τον $p^6 - 1$ για όλους τους πρώτους $p > 7$.

Προτεινόμενη λύση:

Αναλύοντας τον $p^6 - 1$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων θα έχουμε

$$p^6 - 1 = (p^3 - 1)(p^3 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1).$$

Αφού, $p > 7$ για τους δύο επόμενους πρώτους $p = 11$ και $p = 13$, θα πάρουμε

Για $p = 11$

$$p^6 - 1 = 11^6 - 1 = 1771560 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37$$

Για $p = 13$

$$p^6 - 1 = 13^6 - 1 = 4826808 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 61 \cdot 157$$

Παρατηρούμε ότι ο

$$M.K.A(11^6 - 1, 13^6 - 1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$$

Θα αποδείξουμε ότι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος που διαιρεί τον $p^6 - 1$ για όλους τους πρώτους $p > 7$, είναι ο $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

- Από το θεώρημα του Fermat επειδή $(p, 7) = 1$ θα έχουμε:
 $p^{7-1} \equiv 1 \pmod{7}$ ή 7 διαιρεί τον $p^6 - 1$ για όλους τους πρώτους $p > 7$.
- Ο $p > 7$ είναι περιττός αριθμός, έστω $p = 2\rho + 1, \rho \in \mathbb{N}$, τότε θα έχουμε:
 $(p - 1)(p + 1) = p^2 - 1 = (2\rho + 1)^2 - 1 = 4\rho(\rho + 1)$. Από το τελευταίο συμπεραίνουμε ότι το 8 διαιρεί τον $p^2 - 1$, και άρα το 8 διαιρεί τον $p^6 - 1$ για όλους τους πρώτους $p > 7$.
- Ξέρουμε ότι κάθε πρώτος αριθμός $p > 3$ είναι

$$p \equiv 1 \pmod{3} \text{ ή } p \equiv -1 \pmod{3}$$

Αν, $p \equiv 1 \pmod{3}$ ή $p = 1 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{N}$ τότε θα πάρουμε ότι το 3 διαιρεί τον $p - 1$ και το 3 διαιρεί τον $p^2 + p + 1$, αφού $p^2 + p + 1 = (3\lambda + 1)^2 + 3\lambda + 1 + 1 = 3(3\lambda^2 + 3\lambda + 1)$.

Αν, $p \equiv -1 \pmod{3}$ ή $p = -1 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{N}$ τότε θα πάρουμε ότι το 3 διαιρεί τον $p + 1$ και το 3 διαιρεί τον $p^2 - p + 1$, αφού $p^2 - p + 1 = (3\lambda - 1)^2 - 3\lambda + 1 + 1 = 3(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)$. Επομένως και στις δύο περιπτώσεις θα πάρουμε ότι το $9 = 3^2$ διαιρεί τον $p^6 - 1$ για όλους τους πρώτους $p > 7$.

Άρα, από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι ο $n = 504$ είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Πρόβλημα 2 : Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha + \beta + \gamma = 1$, να δείξετε ότι:

$$(α) \sqrt{\alpha + \beta\gamma} + \sqrt{\beta + \alpha\gamma} + \sqrt{\gamma + \alpha\beta} \leq 2$$

$$(β) \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha + \beta\gamma}} + \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta + \alpha\gamma}} + \frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma + \alpha\beta}} \geq \frac{1}{2}$$

Προτεινόμενη λύση

$$(α) \text{ Από τη γνωστή ανισότητα } (x + y)^2 \geq 4xy \rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

$$\text{Ομοίως έχουμε: } \beta\gamma \leq \frac{(\beta+\gamma)^2}{4} = \frac{(1-\alpha)^2}{4} \text{ και άρα } \sqrt{\alpha + \beta\gamma} \leq \sqrt{\alpha + \frac{(1-\alpha)^2}{4}} = \frac{1+\alpha}{2}$$

Ανάλογα και για τις άλλες ποσότητες οπότε και έχουμε

$$\sqrt{\alpha + \beta\gamma} + \sqrt{\beta + \alpha\gamma} + \sqrt{\gamma + \alpha\beta} \leq \frac{1+\alpha}{2} + \frac{1+\beta}{2} + \frac{1+\gamma}{2} = \frac{3+\alpha+\beta+\gamma}{2} = 2$$

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) μέρος

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha + \beta\gamma}} \geq \frac{2 \cdot \alpha^2}{(1 + \alpha)}$$

και κατά αναλογία παίρνουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha + \beta\gamma}} + \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta + \alpha\gamma}} + \frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma + \alpha\beta}} \geq \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha} + \frac{2\beta^2}{1 + \beta} + \frac{2\gamma^2}{1 + \gamma} \geq 2 \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{3 + \alpha + \beta + \gamma} = \frac{1}{2}$$

Πρόβλημα 3 : Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Οι κάθετες από τις κορυφές B και Γ προς τις απέναντι πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο H . Οι μεσοκάθετες των πλευρών του τριγώνου τέμνονται στο σημείο O . Ονομάζουμε Δ το μέσον της πλευράς $B\Gamma$. Προεκτείνουμε την OD προς το Δ και στην προέκταση της παίρνουμε σημείο O' τέτοιο ώστε $OD = \Delta O'$. Υποθέτουμε ότι οι ευθείες HO' και $A\Delta$ τέμνονται στο σημείο P . Από το H φέρουμε κάθετη προς την $A\Delta$ και έστω K το ίχνος της πάνω στην $A\Delta$. Η ευθεία ΓK τέμνει την AB στο σημείο T . Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\angle BT\Gamma$ και $\angle PHK$ είναι ίσες.

Προτεινόμενη λύση

Ξέρουμε ότι

$$OD = \parallel \frac{AH}{2}$$

και αφού από την υπόθεση έχουμε $OD = \Delta O'$ συμπεραίνουμε ότι

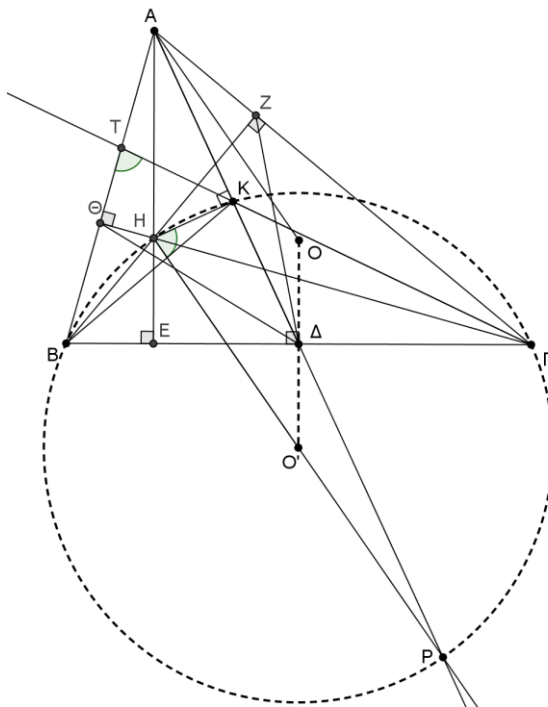
$$\Delta O' = \parallel \frac{AH}{2}$$

Επομένως στο τρίγωνο $\triangle AHP$ τα σημεία Δ, O' θα είναι τα μέσα των πλευρών του AP, HP αντίστοιχα. Δηλαδή, $O'H = O'P$. Όμως το τετράπλευρο $AHO'O$ είναι παραλληλόγραμμο αφού $OO' = \parallel AH$. Άρα, $O'H = OA = OB = OG$. Επίσης το τετράπλευρο $OBO'\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Επομένως $O'B = OB = OG = O'\Gamma = OH$. Δηλαδή τα σημεία B, H, Γ, P βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο $C(O', OH)$.

Έστω ότι αυτός ο κύκλος τέμνει την AP στο K' . Τότε, αφού η HP είναι διάμετρος του, θα έχουμε: $\angle HK'P = 90^\circ$. Όμως από την υπόθεση $\angle HKP = 90^\circ$. Άρα τα σημεία K, K' ταυτίζονται. Δηλαδή τα σημεία B, H, Γ, P, K βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο $C(O', OH)$.

Άρα,

$$\angle HPK = \angle H\Gamma K = \angle \theta \Gamma T \Rightarrow 90^\circ - \angle HPK = 90^\circ - \angle \theta \Gamma T \Rightarrow \angle BT\Gamma = \angle PHK.$$



Πρόβλημα 4 : Ο Γιώργος και ο Δημήτρης παίζουν το εξής παιχνίδι:

Αρχικά είναι γραμμένος στον πίνακα ο αριθμός 2017. Ξεκινώντας από τον Γιώργο, και παίζοντας εναλλάξ, κάθε παίκτης σβήνει τον αριθμό που βλέπει στον πίνακα και στην θέση του γράφει έναν μη αρνητικό ακέραιο ο οποίος προκύπτει από τον προηγούμενο αριθμό αφαιρώντας ένα τέλειο τετράγωνο θετικού ακεραίου το οποίο δεν είναι πολλαπλάσιο του 5.

Ο παίκτης που θα γράψει στον πίνακα τον αριθμό 0, κερδίζει το παιχνίδι. Να βρείτε ποιος από τους δύο παίκτες έχει στρατηγική νίκης.

Προτεινόμενη λύση

Κερδίζει ο Δημήτρης το παιχνίδι, και θα εξηγήσουμε γιατί αυτό συμβαίνει όταν ο Γιώργος παίζει πρώτος. Στην αρχή που ξεκινά το παιχνίδι στον πίνακα είναι γραμμένος ο αριθμός

$$2017 = 403 \cdot 5 + 2 \text{ ή } 2017 \equiv 2(mod 5)$$

Ένας ακέραιος αριθμός μπορεί να είναι της μορφής

$$\alpha = 5\kappa \text{ ή } 5\kappa + 1 \text{ ή } 5\kappa + 2 \text{ ή } 5\kappa + 3 \text{ ή } 5\kappa + 4 \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

Τότε θα έχουμε για τα τετράγωνα τους σε κάθε περίπτωση:

$$\alpha^2 = (5\kappa)^2 = \text{πολλ. του } 5 \text{ ή } \alpha^2 \equiv 0(mod 5)$$

$$\alpha^2 = (5\kappa + 1)^2 = \text{πολλ. του } 5 + 1 \text{ ή } \alpha^2 \equiv 1(mod 5)$$

$$\alpha^2 = (5\kappa + 2)^2 = \text{πολλ. του } 5 + 4 \text{ ή } \alpha^2 \equiv 4(mod 5)$$

$$\alpha^2 = (5\kappa + 3)^2 = \text{πολλ. του } 5 + 4 \text{ ή } \alpha^2 \equiv 4(mod 5)$$

$$\alpha^2 = (5\kappa + 4)^2 = \text{πολλ. του } 5 + 1 \text{ ή } \alpha^2 \equiv 1(mod 5)$$

Επομένως παρατηρούμε ότι κάθε τέλειο τετράγωνο που δεν είναι πολλαπλάσιο του 5, θα είναι

$$\alpha^2 \equiv 1(mod 5) \text{ ή } 4(mod 5)$$

Γνωρίζοντας τα προηγούμενα ο Δημήτρης μπορεί να ελέγξει το παιχνίδι φροντίζοντας ο αριθμός που θα είναι γραμμένος στον πίνακα για παίζει ο Γιώργος να είναι της μορφής

$$\rho = 0(mod 5) \text{ ή } 2(mod 5)$$

οπότε μετά την αφαίρεση ενός τέλειου τετραγώνου θετικού ακεραίου το οποίο δεν είναι πολλαπλάσιο του 5 από τον Γιώργο ο αριθμός που θα είναι γραμμένος στον πίνακα αποκλείεται να είναι πολλαπλάσιο του 5 και άρα θα κερδίσει ο Δημήτρης.

Πράγματι,

1^η περίπτωση: Αν ο αριθμός που είναι γραμμένος στον πίνακα είναι της μορφής

$$\rho = 0(mod 5) = 5\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

τότε ο Γιώργος αφού δεν μπορεί να αφαιρέσει τέλειο τετράγωνο πολλαπλάσιο του 5, αναγκαστικά θα αφαιρέσει ένα τετράγωνο της μορφής

$$\alpha^2 \equiv 1(mod 5) = 5\mu + 1 \text{ ή } \alpha^2 \equiv 4(mod 5) = 5\tau + 4, \quad \mu, \tau \in \mathbb{Z}$$

- Αν αφαιρέσει ο Γιώργος τετράγωνο της μορφής $\alpha^2 \equiv 1(mod 5) = 5\mu + 1$, τότε ο αριθμός που είναι γραμμένος στον πίνακα είναι της μορφής

$$\rho - \alpha^2 = 5\kappa - 5\mu - 1 = 5(\kappa - \mu - 1) + 4 \equiv 4(mod 5)$$

και σε αυτή την περίπτωση ο Δημήτρης στην σειρά του θα αφαιρέσει $2^2 = 4$ και άρα ο αριθμός που θα είναι γραμμένος στον πίνακα θα είναι πολλαπλάσιο του 5.

- Αν αφαιρέσει ο Γιώργος τετράγωνο της μορφής $\alpha^2 \equiv 4(mod 5) = 5\tau + 4$, τότε ο αριθμός που είναι γραμμένος στον πίνακα είναι της μορφής

$$\rho - \alpha^2 = 5\kappa - 5\tau - 4 = 5(\kappa - \tau - 1) + 1 \equiv 1(mod 5)$$

και σε αυτή την περίπτωση ο Δημήτρης στην σειρά του θα αφαιρέσει $1^2 = 1$ και άρα ο αριθμός που θα είναι γραμμένος στον πίνακα θα είναι πολλαπλάσιο του 5.

2^η περίπτωση: Αν ο αριθμός που είναι γραμμένος στον πίνακα είναι της μορφής

$$\rho = 2(mod\ 5) = 5\kappa + 2, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

(όπως είναι και το 2017 που ξεκινά το παιχνίδι), τότε ο Γιώργος αφού δεν μπορεί να αφαιρέσει τέλειο τετράγωνο πολλαπλάσιο του 5, αναγκαστικά θα αφαιρέσει ένα τετράγωνο της μορφής

$$\alpha^2 \equiv 1(mod\ 5) = 5\mu + 1 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 \equiv 4(mod\ 5) = 5\tau + 4, \quad \mu, \tau \in \mathbb{Z}$$

- Αν αφαιρέσει ο Γιώργος τετράγωνο της μορφής $\alpha^2 \equiv 1(mod\ 5) = 5\mu + 1$, τότε ο αριθμός που είναι γραμμένος στον πίνακα είναι της μορφής

$$\rho - \alpha^2 = 5\kappa + 2 - 5\mu - 1 = 5(\kappa - \mu) + 1 \equiv 1(mod\ 5)$$

και σε αυτή την περίπτωση ο Δημήτρης στην σειρά του θα αφαιρέσει $1^2 = 1$ και άρα ο αριθμός που θα είναι γραμμένος στον πίνακα θα είναι πολλαπλάσιο του 5.

- Αν αφαιρέσει ο Γιώργος τετράγωνο της μορφής $\alpha^2 \equiv 4(mod\ 5) = 5\tau + 4$, τότε ο αριθμός που είναι γραμμένος στον πίνακα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \rho - \alpha^2 &= 5\kappa + 2 - 5\tau - 4 = 5\kappa - 5\tau - 2 = 5\kappa - 5\tau - 5 + 3 = 5(\kappa - \tau - 1) + 3 \\ &\equiv 3(mod\ 5) \end{aligned}$$

και σε αυτή την περίπτωση ο Δημήτρης στην σειρά του θα αφαιρέσει $1^2 = 1$ και άρα ο αριθμός που θα είναι γραμμένος στον πίνακα θα είναι της μορφής $2(mod\ 5)$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μόνο ο Δημήτρης μπορεί να γράψει τον αριθμό 0 στον πίνακα και κερδίζει το παιχνίδι.