



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Γ' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 24/03/2018

Ωρα εξέτασης: 10:00-14:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
 2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
 4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
-

Πρόβλημα 1 : Αν α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι

$$\frac{(\alpha^2\gamma + \beta)(\beta^2\alpha + \gamma)(\gamma^2\beta + \alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \geq 8$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Πρόβλημα 2 : Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και Δ το αντιδιαμετρικό του A . Σημειώνουμε με Δ_1 το συμμετρικό του Δ , ως προς την ευθεία AB και με Δ_2 το συμμετρικό του Δ , ως προς την ευθεία $A\Gamma$. Αν I είναι το σημείο τομής των ευθειών $A\Gamma, B\Delta$, και K, N τα μέσα των τμημάτων $\Delta_1\Delta_2$, και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

(α) $\angle \Delta_1 AI = \angle \Delta_1 \Delta_2 I$ και

(β) η παράλληλη ευθεία από το σημείο N προς την $A\Delta$ διέρχεται από το μέσον του AK .

Πρόβλημα 3 : Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί α, β με

$$\alpha = 2^{2018} + 3^{2018} + 4^{2018} + 5^{2018}, \quad \beta = \frac{3^{2019} - 3}{2}$$

Να προσδιορίσετε το ψηφίο των μονάδων του αριθμού $K = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$.

Πρόβλημα 4 : Έχουμε δύο στοίβες με 2000 και 2018 νομίσματα, αντίστοιχα. Δυο παίκτες, η Άννα και ο Βασίλης παίζουν ένα παιχνίδι, παίρνοντας νομίσματα εναλλάξ, σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα: Ο παίκτης του οποίου είναι η σειρά να παίξει, επιλέγει μια στοίβα που έχει τουλάχιστον δύο νομίσματα, παίρνει από αυτήν t νομίσματα, όπου $2 \leq t \leq 4$ και τοποθετεί στην άλλη στοίβα 1 νόμισμα. Οι παίκτες μπορούν, αν θέλουν, να επιλέγουν διαφορετικό t και διαφορετική στοίβα σε κάθε γύρο και ο παίκτης που δεν μπορεί να συνεχίσει, σύμφωνα με τον κανόνα του παιχνιδιού, χάνει. Αν η Άννα παίζει πρώτη, να προσδιορίσετε ποιος από τους δύο παίκτες έχει στρατηγική νίκης.