



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 06/11/2010

Ωρα εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} \cdot \eta\mu x$.
(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
(β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $\sqrt{2} \cdot \eta\mu x \leq e^{x - \frac{\pi}{4}}$.
2. Αν H είναι το ορθόκεντρο (σημείο τομής των υψών) και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι
(α) $AH = 2R \sigma\upsilon\nu A$ και
(β) $AH^2 + BH^2 + \Gamma H^2 = 12R^2 - (B\Gamma^2 + A\Gamma^2 + AB^2)$.
3. Αν οι ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 της εξίσωσης $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι $\alpha(9\beta - 2\alpha^2) = 27\gamma$.
4. Δίνεται η γωνία $\angle \chi O \psi$. Πάνω στις πλευρές $O\chi$ και $O\psi$ της γωνίας παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία A_1, A_2, A_3 και B_1, B_2 έτσι ώστε να ισχύει $OA_1 = A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = \alpha$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν M είναι το σημείο τομής των ευθειών A_1B_1 και B_2A_3 , η γωνία $\angle B_2A_3\chi = 160^\circ$ και N το συμμετρικό του σημείου A_2 ως προς την $O\psi$,
(α) να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο B_1NMB_2 είναι εγγράψιμο.
(β) αν (C) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου B_1NMB_2 να υπολογίσετε συναρτήσει του α το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου που σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα NB_2, B_1B_2 και το μικρότερο τόξο $\widehat{B_1N}$ του κύκλου (C).

