



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2017-A10
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

Αν a, β ακέραιοι αριθμοί και ο 13 διαιρεί τον αριθμό $2a + 3\beta$, να αποδείξετε ότι ο 13 διαιρεί και τον αριθμό $3a - 2\beta$.

Πηγή: Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα, Τάξη VII, Ρουμανία, 2005

Προτεινόμενη Λύση

Ο 13 διαιρεί τον αριθμό $2a + 3\beta$. Επομένως:

$$2a + 3\beta = 13k, \text{ για κάποιο ακέραιο } k \quad (1)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} 3a - 2\beta &= (13a - 10a) - (15\beta - 13\beta) \\ &= 13a - 10a - 15\beta + 13\beta \\ &= (13a + 13\beta) - (10a + 15\beta) \\ &= 13(a + \beta) - 5(2a + 3\beta) \\ &\stackrel{(1)}{=} 13(a + \beta) - 5 \cdot 13k \\ &= 13(a + \beta - 5k) \end{aligned}$$

Άρα, ο 13 διαιρεί και τον αριθμό $3a - 2\beta$.