



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2017-A12
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

Πρόβλημα

Οι εννιά ακέραιοι αριθμοί από το 11 ως και το 19, εκτός από τέσσερεις, μπορούν να σχηματίσουν μια ακολουθία, στην οποία οποιοδήποτε δύο διαδοχικοί όροι της να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1. Για παράδειγμα, μια τέτοια ακολουθία είναι η 16, 18, 15, 12, 14. Αν σχηματίσουμε μια ακολουθία, κάτω από αυτές τις υποθέσεις, χρησιμοποιώντας όσους περισσότερους ακέραιους αριθμούς μπορούμε από το 111 μέχρι και το 119, τότε πόσους και ποιους αριθμούς πρέπει να αποκλείσουμε;

Πηγή: Μεγάλη Βρετανία, JMC 1997

Προτεινόμενη Λύση

Αρχικά, παρατηρούμε ότι ο 113 είναι πρώτος αριθμός. Επομένως, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια τέτοια ακολουθία, αφού ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του με οποιονδήποτε από τους υπόλοιπους οκτώ ακεραίους είναι ο αριθμός 1.

Στη συνέχεια, αναλύουμε τους υπόλοιπους οκτώ αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων ως ακολούθως:

$111 = 3 \cdot 37$	$112 = 2^4 \cdot 7$	$114 = 2 \cdot 3 \cdot 19$	$115 = 5 \cdot 23$
$116 = 2^2 \cdot 29$	$117 = 3^2 \cdot 13$	$118 = 2 \cdot 59$	$119 = 7 \cdot 17$

Παρατηρούμε ότι:

- (α) Ο 115 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, αφού δεν έχει κοινό παράγοντα με κανέναν από τους υπόλοιπους εφτά.
- (β) Ο 119 έχει κοινό παράγοντα μόνο με τον 112, το 7. Άρα, ο 119 πρέπει να βρίσκεται π.χ. στην αρχή της ακολουθίας και να προηγείται του 112.

119, 112, *, *, *, *, *

- (γ) Οι αριθμοί 111, 114 και 117 έχουν κοινό παράγοντα το 3. Έτσι, π.χ. οι 111 και 117 πρέπει να είναι οι δύο τελευταίοι όροι στην ακολουθία, ενώ ο 114 θα προηγείται,

αφού ο 2 είναι ένας πρώτος παράγοντάς του και μπορεί να «συνδυαστεί» με τους αριθμούς που δεν έχουν τοποθετηθεί ακόμη.

119, 112, *, *, 114, 117, 111

Έτσι, μια ακολουθία που ικανοποιεί τις υποθέσεις της άσκησης (όχι μοναδική) είναι η:

119, 112, 118, 116, 114, 117, 111

Επομένως, μπορούμε να αποκλείσουμε δύο αριθμούς, τους 113 και 115.

