

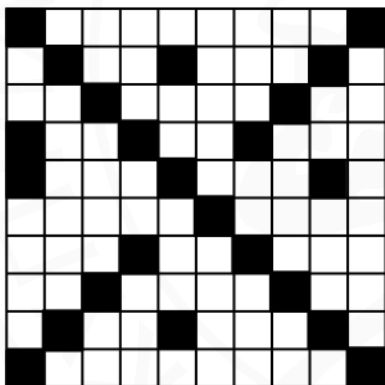


ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

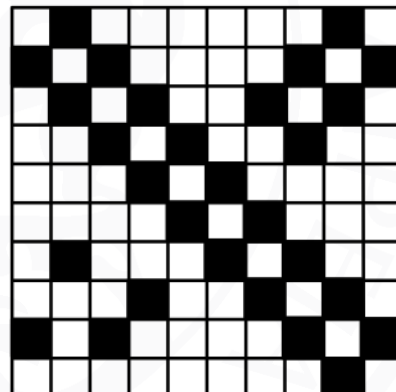
Κωδικός: GYM2017-A21
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

Στα πιο κάτω σχήματα υπάρχουν 100 ίσα τετραγωνάκια χρώματος άσπρου ή μαύρου. Αν κάποιος έχει τη δυνατότητα κάθε φορά να αλλάζει το χρώμα οποιονδήποτε τριών άσπρων ή τριών μαύρων τετραγώνων από άσπρο σε μαύρο ή από μαύρο σε άσπρο, να εξετάσετε κατά πόσο μετά από κάποια βήματα μπορεί να καταλήξει από το Σχήμα 1 στο Σχήμα 2.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Προτεινόμενη Λύση

Το πιο πάνω πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία προβλημάτων που λύνονται με την χρήση μιας αναλλοίωτης ποσότητας. Πιο κάτω θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα για να γίνει κατανοητή η έννοια της αναλλοίωτης.

Παράδειγμα

Από τον αριθμό 3015 μπορούμε να πάρουμε νέους αριθμούς προσθέτοντας ή αφαιρώντας κάθε φορά στον προηγούμενο το 12 ή το 18. Μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να πάρουμε τον αριθμό 6666 ή τον αριθμό 7777;

Στον αριθμό 3015 όσες φορές και αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε το 12 ή το 18 θα πάρουμε περιττό αριθμό. Άρα, μια αναλλοίωτη στο πρόβλημα είναι ότι όλοι οι αριθμοί θα είναι περιττοί. Επομένως, δεν μπορούμε να πάρουμε τον αριθμό 6666, αφού είναι άρτιος.

Δεν μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την αναλλοίωτη για τον αριθμό 7777, αφού είναι περιττός. Μπορούμε όμως να πάρουμε ως αναλλοίωτη ότι όλοι οι αριθμοί που σχηματίζονται με αυτό τον τρόπο είναι πολλαπλάσια του 3. Πράγματι, το 3015 διαιρείται με το 3, το ίδιο και οι αριθμοί 12 και 18. Άρα, όλοι οι αριθμοί που προκύπτουν θα είναι αθροίσματα και διαφορές πολλαπλασίων του 3. Επομένως, δεν μπορούμε να πάρουμε τον αριθμό 7777, αφού ο 3 δεν διαιρεί τον 7777.

Στο πρόβλημα μας τώρα ποια είναι η αναλλοίωτη;

Αρχικά, υπολογίζουμε το πλήθος των άσπρων A και μαύρων M μικρών τετραγώνων στο Σχήμα 1:

$$M = 23, \quad A = 100 - 23 = 77 \quad \text{και} \quad A - M = 54$$

Τώρα, αν αλλάξουμε το χρώμα 3 άσπρων μικρών τετραγώνων x φορές και το χρώμα 3 μαύρων y φορές, τότε έχουμε:

$$M = 23 + 3x - 3y, \quad A = 77 + 3y - 3x \quad \text{και} \quad A - M = 54 + 6x - 6y = 6(9 + x - y)$$

Επομένως, η διαφορά των άσπρων μικρών τετραγώνων από τα μαύρα είναι πάντα πολλαπλάσιο του 6. Αυτή η ιδιότητα που έχει η διαφορά $A - M$ είναι και η αναλλοίωτη του προβλήματος μας.

Η διαφορά, τώρα, των άσπρων μικρών τετραγώνων από τα μαύρα στο Σχήμα 2 είναι $72 - 28 = 44$. Ως εκ τούτου, όσο και να προσπαθήσουμε είναι αδύνατο να καταλήξουμε με την πιο πάνω διαδικασία από το Σχήμα 1 στο Σχήμα 2.