



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2017-B03
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

Δύο καλάθια Α και Β περιέχουν μέσα πορτοκάλια (όχι αναγκαστικά ίσον αριθμό). Αν κάθε φορά βγάζουμε από το καλάθι Α 15 πορτοκάλια, στο τέλος θα μείνουν 7 πορτοκάλια και αν βγάζουμε από το καλάθι Β κάθε φορά 9 πορτοκάλια, στο τέλος θα μείνουν 5 πορτοκάλια.

- (α) Να αποδείξετε ότι είναι αδύνατο το άθροισμα των πορτοκαλιών που περιέχουν και τα δύο καλάθια μαζί να είναι 500.
- (β) Ο Κώστας πήρε όλα τα πορτοκάλια και από τα δύο καλάθια και τα έβαλε σε μικρά σακουλάκια, έτσι ώστε κάθε σακουλάκι να περιέχει 6 πορτοκάλια, εκτός από το τελευταίο σακουλάκι που περιέχει λιγότερα πορτοκάλια μέσα. Πόσα πορτοκάλια περιέχει το τελευταίο σακουλάκι;

Προτεινόμενη Λύση

- (α) Έστω x, y το πλήθος των πορτοκαλιών των καλάθιων Α και Β, αντίστοιχα. Τότε, τα x και y θα έχουν την μορφή:

$$x = 15\kappa + 7 \text{ και } y = 9\lambda + 5, \text{ για κάποιους ακέραιους } \kappa, \lambda$$

Το άθροισμα των πορτοκαλιών των Α και Β καλάθιων θα ισούται με

$$x + y = 15\kappa + 7 + 9\lambda + 5 = 15\kappa + 9\lambda + 12,$$

που είναι πολλαπλάσιο του 3 (αφού $3 \mid 15\kappa, 3 \mid 9\lambda, 3 \mid 12$).

Άρα, το άθροισμα των πορτοκαλιών δεν μπορεί να είναι 500, διότι το $3 \nmid 500$.

- (β) Το τελευταίο σακουλάκι μπορεί να περιέχει 1, 2, 3, 4 ή 5 πορτοκάλια. Ισοδύναμα:

$$x + y = 6\mu + 1, 6\mu + 2, 6\mu + 3, 6\mu + 4 \text{ ή } 6\mu + 5, \text{ για κάποιο ακέραιο } \mu$$

Στο (α) δείξαμε ότι το πλήθος των πορτοκαλιών είναι πολλαπλάσιο του 3. Από τα πιο πάνω, μόνο το $6\mu + 3$ διαιρείται με το 3. Άρα, το τελευταίο σακουλάκι περιέχει 3 πορτοκάλια.