



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2017-B16
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

Η σύζυγός μου και εγώ προσκαλέσαμε σε ένα μικρό πάρτι 4 ζευγάρια. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να λάβουν χώρα μία σειρά από χειραψίες, οι οποίες ικανοποιούσαν 2 προφανείς περιορισμούς: κανένας δεν χαιρετήθηκε ούτε με τον εαυτό του ούτε με τον ή την σύζυγό του. Από περιέργεια ρώτησα τον καθένα (συμπεριλαμβανομένης και της συζύγου μου) πόσες χειραψίες είχε κάνει, με αποτέλεσμα να πάρω 9 διαφορετικές απαντήσεις. Με βάση τις πιο πάνω πληροφορίες, να βρείτε πόσες χειραψίες είχε κάνει η σύζυγός μου.

Πηγή: Πρόβλημα του μεγάλου μαθηματικού Paul Halmos

Προτεινόμενη Λύση

Αρχικά, ο μέγιστος αριθμός χειραψιών που μπορεί να κάνει κάποιος είναι 8, αφού όλα τα άτομα είναι 10 και κανείς δεν κάνει χειραψία είτε με τον εαυτό του είτε με τον/την σύζυγό του.

Αφού τα 9 άτομα έδωσαν 9 διαφορετικές απαντήσεις, τότε οι χειραψίες που έκαναν είναι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Έστω $A_0, A_1, A_2, \dots, A_8$ τα άτομα που έκαναν 0, 1, 2, $\dots$, 8 χειραψίες, αντίστοιχα και έστω X το άτομο που περιγράφει το πρόβλημα. Έχουμε:

- Το άτομο A_8 έκανε 8 χειραψίες. Άρα, δεν έκανε χειραψία μόνο με τον/την σύζυγο του/της.
- Το άτομο A_0 έκανε 0 χειραψίες. Άρα, δεν έκανε χειραψία με τον A_8 .

Έπεται ότι τα άτομα A_0, A_8 είναι ζευγάρι και η σύζυγος του X είναι ένα άτομο εκ των $A_1, A_2, A_3, \dots, A_7$.

Αν αφαιρέσουμε τη χειραψία που έκανε ο A_8 με τον καθένα από τους πιο πάνω, τότε βρίσκουμε ότι τα άτομα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_7$ έκαναν μεταξύ τους 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, αντίστοιχα. Έχουμε:

- Το άτομο A_7 έκανε 6 χειραψίες. Άρα, δεν έκανε χειραψία μόνο με τον/την σύζυγο του/της.
- Το άτομο A_1 έκανε 0 χειραψίες. Άρα, δεν έκανε χειραψία με τον A_7 .

Έπεται ότι τα άτομα A_1, A_7 είναι ζευγάρι και η σύζυγος του X είναι ένα άτομο εκ των $A_2, A_3, \dots, A_6$.

Αν αφαιρέσουμε τις χειραψίες που έκαναν οι A_7, A_8 με τον καθένα από τους πιο πάνω, τότε βρίσκουμε ότι τα άτομα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_7$ έκαναν μεταξύ τους 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, αντίστοιχα.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι τα άτομα A_2, A_6 και A_3, A_5 είναι ζευγάρια. Επομένως, η γυναίκα του X είναι το άτομο A_4 και έχει κάνει 4 χειραψίες.