



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2017-B26
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

Να υπολογίσετε πόσα μηδενικά έχει στο τέλος του το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού όλων των φυσικών αριθμών από το 1 μέχρι και το 2000.

Προτεινόμενη Λύση

Από την ιδιότητα των δυνάμεων

$$10^{\nu} = (2 \cdot 5)^{\nu} = 2^{\nu} \cdot 5^{\nu}$$

συμπεραίνουμε ότι:

- Οι παράγοντες που είναι πολλαπλάσια του 5 και όχι του $25 = 5^2$, όταν πολλαπλασιαστούν με ένα άρτιο αριθμό, δίνουν από ένα μηδενικό.
- Οι παράγοντες που είναι πολλαπλάσια του $25 = 5^2$ και όχι του $125 = 5^3$, όταν πολλαπλασιαστούν με ένα πολλαπλάσιο του $4 = 2^2$, δίνουν από δύο μηδενικά.
- Οι παράγοντες που είναι πολλαπλάσια του $125 = 5^3$ και όχι του $625 = 5^4$, όταν πολλαπλασιαστούν με ένα πολλαπλάσιο του $8 = 2^3$, δίνουν από τρία μηδενικά.
- Οι παράγοντες που είναι πολλαπλάσια του $625 = 5^4$, όταν πολλαπλασιαστούν με ένα πολλαπλάσιο του $16 = 2^4$ δίνουν από τέσσερα μηδενικά.

Έστω $\Pi_5, \Pi_{25}, \Pi_{125}, \Pi_{625}$ τα σύνολα των θετικών πολλαπλασίων του 5, 25, 125, 625, αντίστοιχα που είναι μικρότερα ή ίσα του 2000. Τότε:

$$N(\Pi_5) = 2000 : 5 = 400$$

$$N(\Pi_{25}) = 2000 : 25 = 80$$

$$N(\Pi_{125}) = 2000 : 125 = 16$$

$$N(\Pi_{625}) = 3$$

Άρα, στο σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, 2000\}$ έχουμε:

3 πολλαπλάσια του 625

$16-3 = 13$ πολλαπλάσια του 125 που δεν είναι πολλαπλάσια του 625

$80-16 = 64$ πολλαπλάσια του 25 που δεν είναι πολλαπλάσια του 125

$400-80 = 320$ πολλαπλάσια του 5 που δεν είναι πολλαπλάσια του 25

Επομένως, το γινόμενο

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1999 \cdot 2000$$

έχει στο τέλος του

$$3 \cdot 4 + 13 \cdot 3 + 64 \cdot 2 + 320 \cdot 1 = 499$$

μηδενικά.