

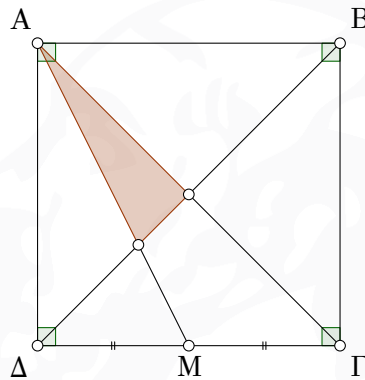


ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2017-C05
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

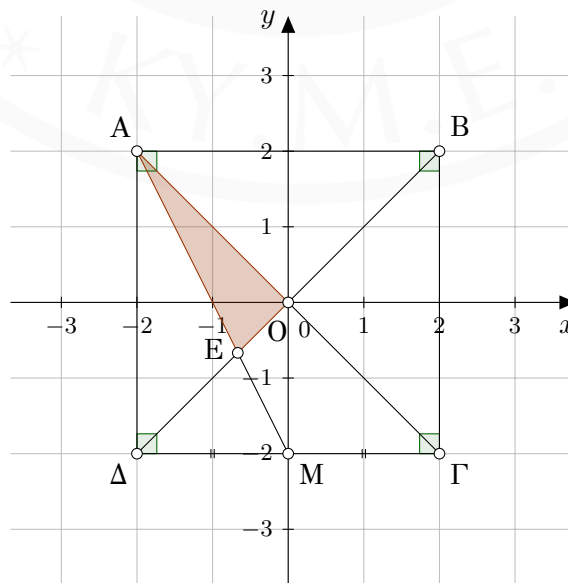
Πρόβλημα

Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά 4 cm και το M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



Προτεινόμενη Λύση

Τοποθετούμε το τετράγωνο στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε

$$(ΑΓ)^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow ΑΓ = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow ΑΟ = 2\sqrt{2} \text{ cm},$$

αφού οι διαγώνιοι του τετραγώνου διχοτομούνται.

Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου Ε.

Η εξίσωση της ευθείας ΒΔ είναι η $y = x$, αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Β(2, 2).

Η εξίσωση της ευθείας ΑΜ είναι της μορφής $y = ax - 2$, αφού διέρχεται από το σημείο Μ(0, -2). Επιπλέον, διέρχεται και από το σημείο Α(-2, 2). Επομένως:

$$2 = a(-2) - 2 \Rightarrow 2 = -2a - 2 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

Συνεπώς, η εξίσωση της ευθείας ΑΜ είναι η $y = -2x - 2$.

Επιλύοντας το σύστημα

$$\begin{cases} y = x \\ y = -2x - 2 \end{cases},$$

βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Ε είναι $E\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Υπολογίζουμε την απόσταση των σημείων Ο(0, 0) και $E\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$:

$$OE = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

Το τρίγωνο ΑΟΕ είναι ορθογώνιο, αφού οι διαγώνιοι του τετραγώνου τέμνονται κάθετα.

Επομένως:

$$E_{AOE} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{3} \text{ cm}^2$$