



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2017-C07
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

- (α) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων το πολυώνυμο $x^4 + 4$.
- (β) Να υπολογίσετε τις τιμές των θετικών ακεραίων ν , έτσι ώστε ο αριθμός $\nu^4 + 4$ να είναι πρώτος αριθμός.

Προτεινόμενη Λύση

- (α) Είναι:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

- (β) Από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$\nu^4 + 4 = (\nu^2 + 2\nu + 2)(\nu^2 - 2\nu + 2)$$

Αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος, έχουμε:

$$0 < \nu^2 - 2\nu + 2 < \nu^2 + 2\nu + 2$$

Συμπεραίνουμε ότι ο $\nu^4 + 4$ μπορεί να είναι πρώτος, μόνο όταν ο αριθμός $\nu^2 - 2\nu + 2$ ισούται με 1. Διαφορετικά, ο $\nu^4 + 4$ θα είναι σύνθετος, αφού θα ισούται με το γινόμενο δύο θετικών ακεραίων μεγαλύτερων της μονάδας.

Έχουμε:

$$\nu^2 - 2\nu + 2 = 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 2\nu + 1 = 0 \Leftrightarrow (\nu - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \nu = 1$$

Ελέγχουμε τώρα κατά πόσο ο αριθμός $\nu^4 + 4$ είναι πρώτος, όταν $\nu = 1$:

$$\nu^4 + 4 = 1 + 4 = 5$$

Ο 5 είναι πρώτος αριθμός. Έτσι, η μόνη θετική ακέραια τιμή που μπορεί να πάρει ο ν , ώστε ο $\nu^4 + 4$ να είναι πρώτος, είναι $\boxed{\nu = 1}$.