



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2017-C09
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

Η ακολουθία Fibonacci $\{F_\nu\}$ ορίζεται ως εξής:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_\nu = F_{\nu-2} + F_{\nu-1}$$

Για παράδειγμα, οι 10 πρώτοι όροι της ακολουθίας Fibonacci είναι οι:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του F_{2026} όταν διαιρεθεί με το 8.

Πηγή: PEMIC 2009

Προτεινόμενη Λύση

Θέτω U_ν το υπόλοιπο της διαίρεσης του F_ν με το 8. Αρκεί να υπολογίσω το U_{2026} . Επειδή κάθε όρος, εκτός από τους δύο πρώτους, εξαρτάται από τους δύο προηγούμενους του ($U_1 = 1, U_2 = 1, U_\nu = U_{\nu-2} + U_{\nu-1}$), υπολογίζουμε τους πρώτους όρους του U_ν , μέχρις ότου φτάσουμε σε δύο ίσα ζεύγη διαδοχικών όρων. Στην περίπτωση αυτή, η ακολουθία θα είναι περιοδική (κάποιοι όροι της ακολουθίας θα επαναλαμβάνονται με την ίδια σειρά). Έχουμε:

$$\{U_\nu\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$$

Άρα, οι 12 πρώτοι όροι της πιο πάνω ακολουθίας επαναλαμβάνονται. Εκτελώντας τη διαίρεση $2026 : 12$, βρίσκουμε πηλίκο 168 και υπόλοιπο 10. Ο δέκατος όρος από τους 12 που επαναλαμβάνονται είναι ο 7. Επομένως:

$$U_{2026} = 7$$