



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2017-C11
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

Δίνεται η συνάρτηση:

$$A(x) = \frac{x^\nu}{x^\nu + (1-x)^\nu}, \quad x \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$A(x) + A(1-x) = 1$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$A\left(\frac{1}{2020}\right) + A\left(\frac{2}{2020}\right) + A\left(\frac{3}{2020}\right) + \cdots + A\left(\frac{2019}{2020}\right) + A(1)$$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Υπολογίζουμε την παράσταση:

$$\begin{aligned} A(1-x) &= \frac{(1-x)^\nu}{(1-x)^\nu + [1-(1-x)]^\nu} \\ &= \frac{(1-x)^\nu}{(1-x)^\nu + (1-1+x)^\nu} \\ &= \frac{(1-x)^\nu}{(1-x)^\nu + x^\nu} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} A(x) + A(1-x) &= \frac{x^\nu}{x^\nu + (1-x)^\nu} + \frac{(1-x)^\nu}{(1-x)^\nu + x^\nu} \\ &= \frac{x^\nu + (1-x)^\nu}{(1-x)^\nu + x^\nu} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(β) Από το ερώτημα (α) για

$$x = \frac{1}{2020}, \frac{2}{2020}, \frac{3}{2020}, \dots, \frac{1009}{2020},$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{2020}\right) + A\left(\frac{2019}{2020}\right) &= 1 \\ A\left(\frac{2}{2020}\right) + A\left(\frac{2018}{2020}\right) &= 1 \\ A\left(\frac{3}{2020}\right) + A\left(\frac{2017}{2020}\right) &= 1 \\ &\vdots \\ A\left(\frac{1009}{2020}\right) + A\left(\frac{1011}{2020}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1010}{2020}\right) &= A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^\nu}{\left(\frac{1}{2}\right)^\nu + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^\nu} = A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^\nu}{\left(\frac{1}{2}\right)^\nu + \left(\frac{1}{2}\right)^\nu} = \frac{1}{2} \\ A(1) &= \frac{1^\nu}{1^\nu + (1-1)^\nu} = 1 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} S &= A\left(\frac{1}{2020}\right) + A\left(\frac{2}{2020}\right) + A\left(\frac{3}{2020}\right) + \dots + A\left(\frac{2019}{2020}\right) + A(1) \\ &= \left[A\left(\frac{1}{2020}\right) + A\left(\frac{2019}{2020}\right)\right] + \dots + \left[A\left(\frac{1009}{2020}\right) + A\left(\frac{1011}{2020}\right)\right] + A\left(\frac{1010}{2020}\right) + A(1) \\ &= \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{1009 \text{ προσθετέοι}} + \frac{1}{2} + 1 = 1010,5 \end{aligned}$$