

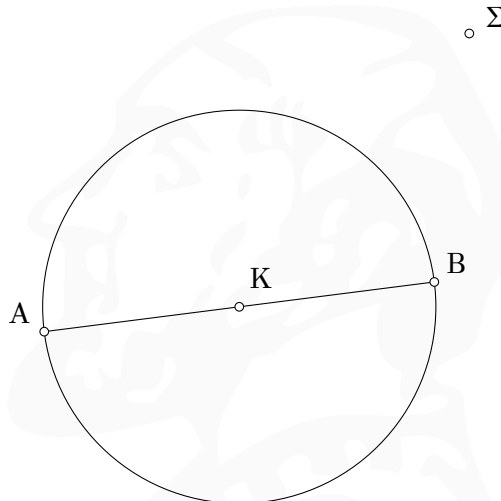


ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2018-A15
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

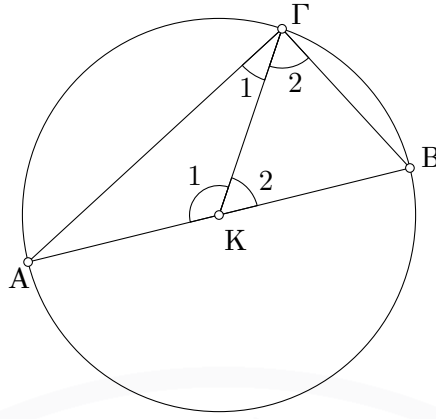
Δίνεται κύκλος (K, R) και AB μία διάμετρος του, όπως φαίνεται πιο κάτω.



- (α) Αν Γ είναι ένα τυχαίο σημείο του κύκλου, να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- (β) Χρησιμοποιώντας μόνο χάρακα, να φέρετε κάθετη από το σημείο Σ στην AB .

Προτεινόμενη Λύση

- (α) Τα τρίγωνα $\triangle AK\Gamma$ και $\triangle BK\Gamma$ είναι ισοσκελή, αφού $KA = KB = K\Gamma$ (ακτίνες κύκλου).



Άρα:

$$\angle A = \angle \Gamma_1, \quad \angle B = \angle \Gamma_2 \quad (1)$$

Από το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων $\triangle AK\Gamma$ και $\triangle BK\Gamma$, παίρνουμε:

$$\angle A + \angle \Gamma_1 + \angle K_1 = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2\angle \Gamma_1 + \angle K_1 = 180^\circ \quad (2)$$

$$\angle B + \angle \Gamma_2 + \angle K_2 = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2\angle \Gamma_2 + \angle K_2 = 180^\circ \quad (3)$$

Αθροίζοντας τις εξισώσεις (2) και (3), παίρνουμε:

$$2\angle \Gamma_1 + 2\angle \Gamma_2 + \angle K_1 + \angle K_2 = 360^\circ \quad (4)$$

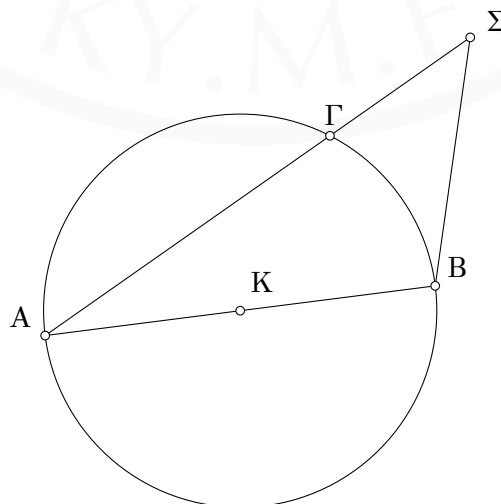
Ισχύει $\angle K_1 + \angle K_2 = 180^\circ$. Επομένως, από την (4) παίρνουμε:

$$2\angle \Gamma_1 + 2\angle \Gamma_2 = 180^\circ \Rightarrow \angle \Gamma_1 + \angle \Gamma_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle \Gamma = 90^\circ$$

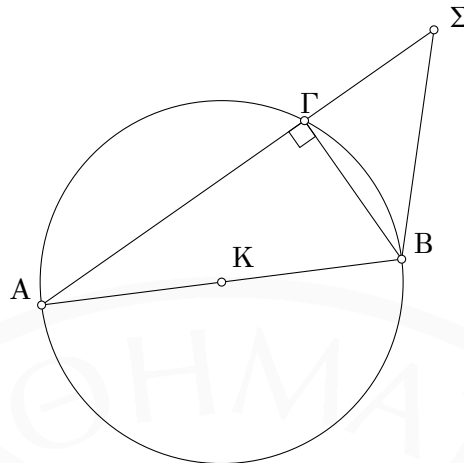
Έτσι, το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(β) Ακολουθούμε με σειρά τα πιο κάτω βήματα:

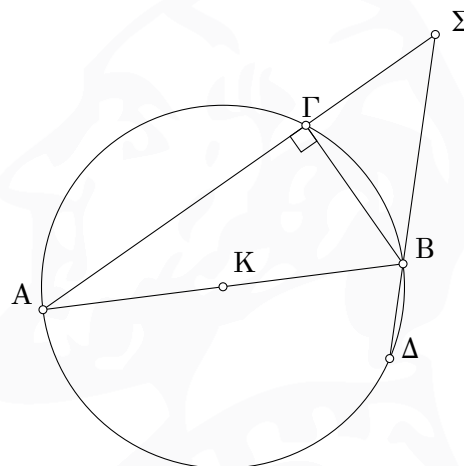
- Σχηματίζουμε το τρίγωνο $\triangle AB\Sigma$ και θέτουμε Γ το σημείο τομής του ΣA με τον κύκλο.



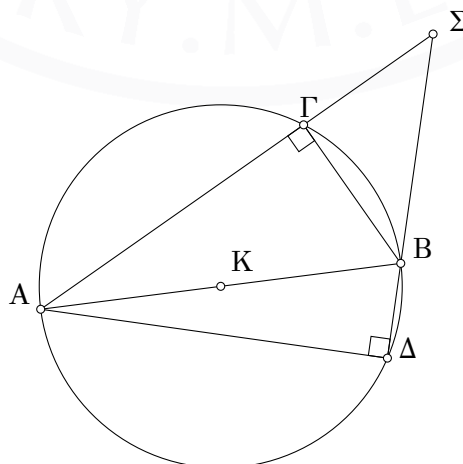
- Φέρουμε το $B\Gamma$. Από το ερώτημα (α), έχουμε ότι η γωνία $\angle A\Gamma B$ είναι ορθή. Επομένως, το $B\Gamma$ είναι ύψος του τριγώνου $\triangle AB\Sigma$.



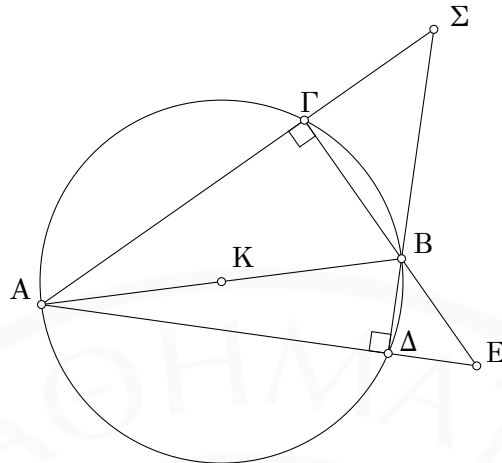
- Θέτουμε Δ το σημείο τομής της προέκτασης του ΣB με τον κύκλο.



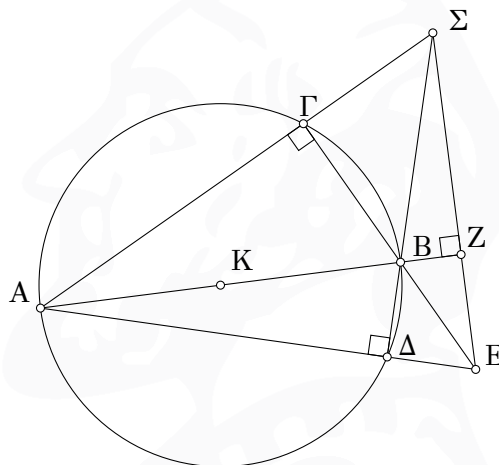
- Φέρουμε το $A\Delta$. Από το ερώτημα (α), έχουμε ότι η γωνία $\angle A\Delta B$ είναι ορθή. Επομένως, το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $\triangle AB\Sigma$.



- Θέτουμε E το σημείο τομής των υψών $B\Gamma$ και $A\Delta$ του τριγώνου $\triangle AB\Sigma$.
Επομένως, το σημείο E είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $\triangle AB\Sigma$.



- Φέρουμε το ΣE και θέτουμε Z το σημείο τομής των AB και ΣE .



Επειδή το E είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $\triangle AB\Sigma$ και η ΣZ περνά από το E , έπεται ότι το ΣZ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου $\triangle AB\Sigma$. Επομένως, $\Sigma Z \perp AB$.