

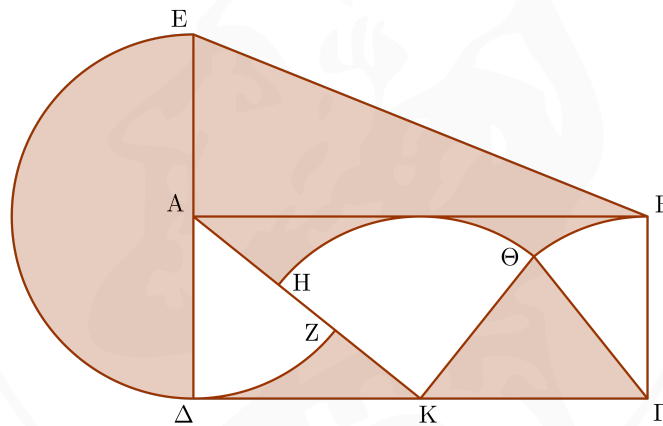


ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2018-B01
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

Στο πιο κάτω σχήμα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με εμβαδόν 41 cm^2 , το $\widehat{E\Delta}$ είναι ημικύκλιο, το $\widehat{H\Theta}$ τεταρτοκύκλιο το οποίο εφάπτεται του AB , το $\widehat{\Delta Z}$ τόξο με κέντρο το A και το $\widehat{B\Theta}$ τόξο με κέντρο το Γ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



Προτεινόμενη Λύση

Έστω $\angle \Delta AK = x$. Τότε:

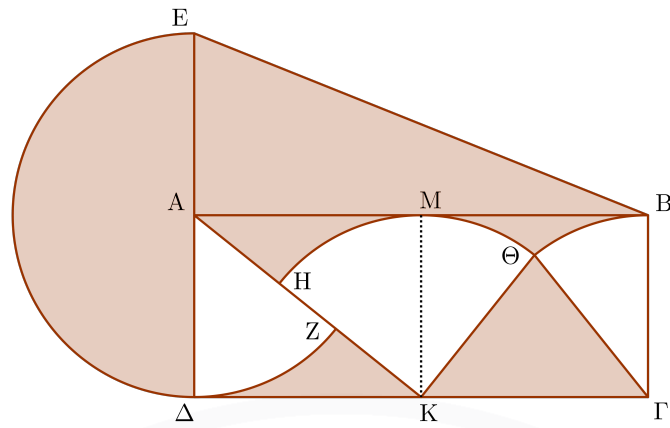
$$\angle AK\Delta = 90^\circ - x \text{ (αφού } \triangle A\Delta K \text{ ορθογώνιο τρίγωνο)}$$

$$\angle HK\Theta = 90^\circ \text{ (αφού } \widehat{H\Theta} \text{ τεταρτοκύκλιο)}$$

$$\angle \Theta K\Gamma = 180^\circ - (\angle AK\Delta + \angle HK\Theta) = 180^\circ - (90^\circ - x + 90^\circ) = x$$

Επειδή το $\widehat{H\Theta}$ έχει κέντρο το K και εφάπτεται του AB , έστω στο M , το KM θα είναι κάθετο στο AB . Επομένως, το τετράπλευρο $B\Gamma K M$ είναι ορθογώνιο.

Το τρίγωνο $\triangle \Theta K\Gamma$ είναι ισοσκελές, διότι $\Theta K = K M$ (ακτίνες τόξου $\widehat{H\Theta}$), $\Theta \Gamma = B\Gamma$ (ακτίνες τόξου $\widehat{B\Theta}$) και $B\Gamma = K M$ (απέναντι πλευρές ορθογωνίου $B\Gamma K M$).



Έχουμε:

$$\angle \Theta \Gamma \mathbf{K} = \angle \Theta \mathbf{K} \Gamma = x, \quad \angle \mathbf{B} \Gamma \Theta = 90^\circ - x$$

Επομένως, οι γωνίες $\angle \Delta \mathbf{A} \mathbf{K}$ και $\angle \mathbf{B} \Gamma \Theta$ είναι συμπληρωματικές.

Οι κυκλικοί τομείς $\Delta \mathbf{A} \mathbf{Z}$, $\mathbf{H} \mathbf{K} \Theta$ και $\mathbf{B} \Gamma \Theta$ έχουν την ίδια ακτίνα με το ημικύκλιο $\widehat{\mathbf{E} \Delta}$ και το άθροισμα των επίκεντρων γωνιών τους ισούται με 180° . Άρα, το εμβαδόν του ημικυκλίου $\widehat{\mathbf{E} \Delta}$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τομέων $\Delta \mathbf{A} \mathbf{Z}$, $\mathbf{H} \mathbf{K} \Theta$ και $\mathbf{B} \Gamma \Theta$.

Τελικά, το σκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το άθροισμα του εμβαδού του ορθογωνίου $\mathbf{A} \mathbf{B} \Gamma \Delta$ και του τριγώνου $\Delta \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{E}$. Δηλαδή:

$$41 + \frac{41}{2} = 61,5 \text{ cm}^2$$