

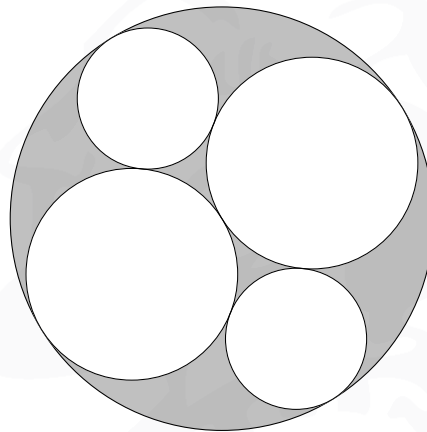


ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2018-B06
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

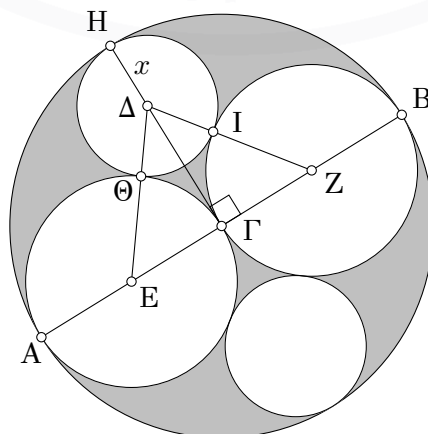
Πρόβλημα

Ο μεγάλος κύκλος του πιο κάτω σχήματος έχει ακτίνα 2 cm και περιέχει δύο μεσαίους ίσους κύκλους και δύο μικρούς ίσους κύκλους. Αν ο καθένας κύκλος εφάπτεται με τους άλλους τρεις, να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου.



Προτεινόμενη Λύση

Το ευθύγραμμο τμήμα AB, λόγω συμμετρίας, είναι διάμετρος του μεγάλου κύκλου και έχει μήκος ίσο με τέσσερις ακτίνες του μεσαίου κύκλου.



Επομένως:

$$4(ΕΓ) = 4 \Rightarrow (ΕΓ) = 1 \text{ cm}$$

Έστω x το μήκος της ακτίνας του μικρού κύκλου. Τότε:

$$(ΗΓ) = (ΗΔ) + (ΔΓ) \Rightarrow 2 = x + (ΔΓ) \Rightarrow (ΔΓ) = 2 - x$$

$$(ΔΕ) = (ΕΘ) + (ΘΔ) \Rightarrow (ΔΕ) = 1 + x$$

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $\triangle ΓΕΔ$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= (2-x)^2 + 12 \Rightarrow (x+1)(x+1) = (2-x)(2-x) + 1 \\ &\Rightarrow x^2 + x + x + 1 = 4 - 2x - 2x + x^2 + 1 \\ &\Rightarrow 6x = 4 \\ &\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ cm}\end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\text{Εμβαδόν μεγάλου κυκλικού δίσκου : } \pi 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Εμβαδόν μεσαίου κυκλικού δίσκου : } \pi 1^2 = \pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Εμβαδόν μικρού κυκλικού δίσκου : } \pi \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4\pi}{9} \text{ cm}^2$$

$$\text{Εμβαδόν σκιασμένου χωρίου : } 4\pi - \left(\pi + \pi + \frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{9}\right) = \frac{10\pi}{9} \text{ cm}^2$$

$$\text{Μήκος μεγάλου κύκλου : } 2\pi 2 = 4\pi \text{ cm}$$

$$\text{Μήκος μεσαίου κύκλου : } 2\pi 1 = 2\pi \text{ cm}$$

$$\text{Μήκος μικρού κύκλου : } 2\pi \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Περίμετρος σκιασμένου χωρίου : } 4\pi + 2\pi + 2\pi + \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} \text{ cm}$$