

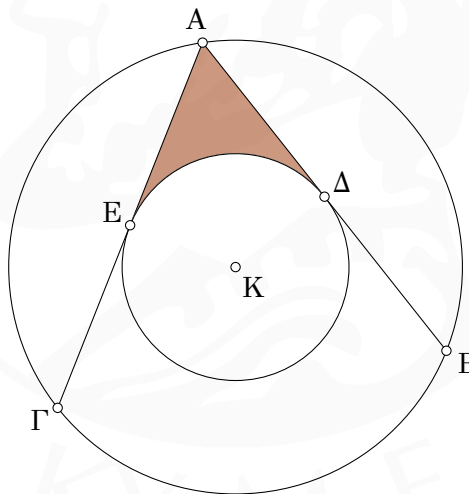


ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2018-B20
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

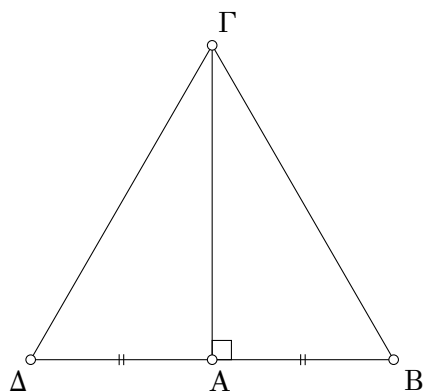
Πρόβλημα

- (α) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) ισχύει $(B\Gamma) = 2(AB)$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\angle \Gamma$ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.
- (β) Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι $(K, 6 \text{ cm})$ και $(K, 12 \text{ cm})$. Αν οι χορδές AB και $A\Gamma$ του μεγάλου κύκλου εφάπτονται του μικρού κύκλου στα σημεία Δ και E , αντίστοιχα, να υπολογίσετε το σκιασμένο εμβαδόν.



Προτεινόμενη Λύση

- (α) Κατασκευάζουμε το συμμετρικό τρίγωνο του $\triangle AB\Gamma$ ως προς την πλευρά $A\Gamma$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:



Τότε:

$$(ΔΓ) = (ΒΓ), \quad (ΑΒ) = (ΑΔ) \quad (1)$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε ότι:

$$(ΒΓ) = 2(ΑΒ) \quad (2)$$

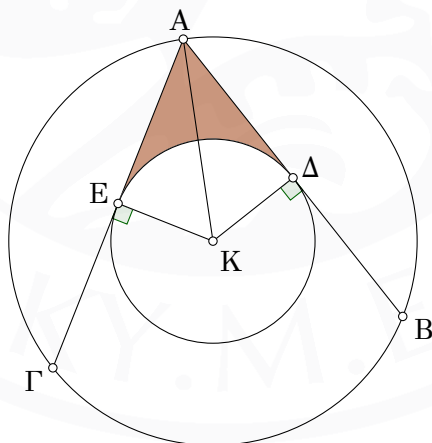
Από τις (1) και (2), έχουμε:

$$(ΒΔ) = (ΔΓ) = (ΒΓ) = 2(ΑΒ)$$

Άρα, το τρίγωνο $\triangle ΒΓΔ$ είναι ισόπλευρο. Επομένως:

$$\angle B = 60^\circ, \quad \angle ΑΓΒ = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$$

(β) Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΕ, ΚΔ και ΑΚ, όπως φαίνεται πιο κάτω.



Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\text{σκιασμένο}} = E_{\triangle ΑΕΚΔ} - E_{\text{τομ.}(ΕΚΔ)}$$

Η ΑΓ είναι εφαπτομένη του μικρού κύκλου στο σημείο Ε. Άρα, $EK \perp ΑΓ$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $\triangle ΑΕΚ$, έχουμε ότι:

$$(ΑΕ)^2 = (ΑΚ)^2 - (ΚΕ)^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \Rightarrow (ΑΕ) = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Έτσι:

$$E_{\triangle A\epsilon K} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Λόγω συμμετρίας, έχουμε ότι $E_{\triangle A\Delta K} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Επομένως:

$$E_{A\epsilon K\Delta} = 18\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad (3)$$

Στο τρίγωνο $\triangle A\epsilon K$, η υποτείνουσα $A\epsilon$ είναι διπλάσια σε μήκος από την κάθετη πλευρά ϵK . Έτσι, $\angle \epsilon A K = 30^\circ$ και $\angle \epsilon K A = 60^\circ$. Ομοίως, $\angle A K \Delta = 60^\circ$ και έχουμε ότι:

$$E_{\text{τομ.}(\epsilon K \Delta)} = \frac{\pi(\epsilon K)^2 \cdot (\angle \epsilon K \Delta)}{360^\circ} = \frac{\pi 6^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 12\pi \text{ cm}^2 \quad (4)$$

Τέλος, από τις (3) και (4), έπεται ότι:

$$E_{\text{σκιασμένο}} = 36\sqrt{3} - 12\pi = 12(3\sqrt{3} - \pi) \text{ cm}^2$$