



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2018-B26

Επιμέλεια: Γιώργος Χειμωνίδης

Πρόβλημα

Ορίζουμε ως «άθροισμα ψηφίων» το άθροισμα των ψηφίων ενός μη αρνητικού ακέραιου αριθμού. Για παράδειγμα, το «άθροισμα ψηφίων» του αριθμού 123 είναι $1 + 2 + 3 = 6$.

(α) Πόσοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί μικρότεροι του 100 έχουν «άθροισμα ψηφίων» ίσο με 8;

Έστω ν θετικός ακέραιος μικρότερος του 10.

(β) Πόσοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί μικρότεροι του 100 έχουν «άθροισμα ψηφίων» ίσο με ν ;

(γ) Πόσοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 500 και του 999 έχουν «άθροισμα ψηφίων» ίσο με 8;

(δ) Πόσοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί μικρότεροι του 1000 έχουν «άθροισμα ψηφίων» ίσο με 8 και ένα τουλάχιστον ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 5;

(ε) Ποιο είναι το συνολικό «άθροισμα ψηφίων» όλων των θετικών ακέραιων αριθμών από το 0 μέχρι το 999;

Προτεινόμενη Λύση

(α) Υπάρχουν συνολικά 9 αριθμοί με «άθροισμα ψηφίων» ίσο με 8. Οι αριθμοί αυτοί είναι οι 8, 80, 17, 71, 26, 62, 35, 53 και 44.

(β) Το ψηφίο των δεκάδων παίρνει τιμές από 0 μέχρι ν . Το ψηφίο των μονάδων καθορίζει το ψηφίο των μονάδων, αφού το «άθροισμα ψηφίων» πρέπει να είναι σταθερό και ίσο με ν . Επομένως, υπάρχουν $\nu + 1$ τέτοιοι αριθμοί.

(γ) Έχουμε ότι:

- Αν το ψηφίο των εκατοντάδων είναι το 5, τότε το άθροισμα των άλλων 2 ψηφίων είναι το 3. Υπάρχουν 4 τέτοιοι αριθμοί, οι 503, 530, 512, 521.

- Αν το ψηφίο των εκατοντάδων είναι το 6, τότε το άθροισμα των άλλων 2 ψηφίων είναι το 2. Υπάρχουν 3 τέτοιοι αριθμοί, οι 602, 620, 611.
- Αν το ψηφίο των εκατοντάδων είναι το 7, τότε το άθροισμα των άλλων 2 ψηφίων είναι το 1. Υπάρχουν 2 τέτοιοι αριθμοί, οι 701, 710.
- Αν το ψηφίο των εκατοντάδων είναι το 8, τότε το άθροισμα των άλλων 2 ψηφίων είναι το 0. Υπάρχει 1 τέτοιος αριθμός, ο 800.

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν συνολικά $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ θετικοί ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 500 και του 999 που έχουν «άθροισμα ψηφίων» ίσο με 8.

- (δ) Αν το ψηφίο των εκατοντάδων είναι τουλάχιστον 5, τότε από το (β) υπάρχουν 10 τέτοιοι αριθμοί. Ομοίως, υπάρχουν άλλοι 10 αριθμοί που το ψηφίο των δεκάδων είναι τουλάχιστον 5 και άλλοι 10 που το ψηφίο των μονάδων είναι τουλάχιστον 5. Έτσι, καταλήγουμε ότι υπάρχουν 30 θετικοί ακέραιοι αριθμοί μικρότεροι του 1000 που έχουν «άθροισμα ψηφίων» ίσο με 8 και ένα τουλάχιστον ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 5.
- (ε) Κάθε ψηφίο από το 0 μέχρι το 9 εμφανίζεται σε κάθε θέση 100 φορές, αφού οι αριθμοί είναι 1000 και τα ψηφία 10. Υπάρχουν 3 θέσεις, εκατοντάδες, δεκάδες και μονάδες. Άρα, κάθε ψηφίο εμφανίζεται συνολικά 300 φορές. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι το συνολικό «άθροισμα ψηφίων» όλων των θετικών ακέραιων αριθμών από το 0 μέχρι το 999 είναι $300(0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 300 \cdot 45 = 13500$.