



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2018-C17
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

- (α) Έστω ν περιττός αριθμός, $\nu \neq 5$. Να αποδείξετε ότι ο 10 διαιρεί τον $\nu^4 - 1$.
- (β) Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς p , για τους οποίους ο αριθμός $p^4 - 6$ είναι επίσης πρώτος αριθμός.

Προτεινόμενη Λύση

- (α) Γνωρίζουμε ότι ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τον 10, όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0.

Ο ν είναι περιττός αριθμός, $\nu \neq 5$. Επομένως, το ψηφίο των μονάδων του είναι 1, 3, 7 ή 9.

Σε όλες τις πιο πάνω περιπτώσεις, το ψηφίο των μονάδων του ν^4 είναι 1. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο $\nu^4 - 1$ τελειώνει σε 0.

Άρα, έχουμε ότι $10 \mid \nu^4 - 1$, για κάθε περιττό αριθμό ν , $\nu \neq 5$.

- (β) Αν ο p είναι άρτιος, τότε υποχρεωτικά $p = 2$. Όμως, $p^4 - 6 = 2^4 - 6 = 10$, που είναι σύνθετος. Άρα, ο p είναι περιττός αριθμός.

Από το ερώτημα (α), αν $p \neq 5$, τότε

$$10 \mid p^4 - 1 \Rightarrow 5 \mid p^4 - 1 \Rightarrow 5 \mid p^4 - 1 - 5 \Rightarrow 5 \mid p^4 - 6,$$

που είναι άτοπο, αφού ο $p^4 - 6$ είναι πρώτος.

Επομένως, ο p μπορεί να είναι ίσος μόνο με 5. Έχουμε $5^4 - 6 = 625 - 6 = 619$, που είναι πρώτος αριθμός. Έτσι, ο μόνος πρώτος αριθμός που ικανοποιεί τις υποθέσεις του προβλήματος είναι ο $p = 5$.