



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2019-A09

Επιμέλεια: Γιώργος Χειμωνίδης

Πρόβλημα

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να επιλεγούν οι αριθμοί a, β, γ και δ από το σύνολο $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, έτσι ώστε $a < \beta < \gamma < \delta$ και ο αριθμός $a + \beta + \gamma + \delta$ να είναι πολλαπλάσιο του 3;

Προτεινόμενη Λύση

Όταν επιλέξουμε 4 διαφορετικούς αριθμούς, τότε προφανώς υπάρχει μόνο ένας τρόπος να τους βάλουμε σε αύξουσα σειρά. Άρα, χρειάζεται να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 4 αριθμούς από το σύνολο που δίνεται, έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι πολλαπλάσιο του 3, χωρίς να χρειάζεται να κοιτάξουμε τη σειρά επιλογής των αριθμών αυτών.

Οι αριθμοί 0, 3, 6 και 9 αφήνουν υπόλοιπο 0 όταν διαιρεθούν με το 3, οι αριθμοί 1, 4 και 7 αφήνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθούν με το 3 και οι αριθμοί 2, 5 και 8 αφήνουν υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθούν με το 3.

Υπάρχουν οι πιο κάτω περιπτώσεις, ώστε το άθροισμα τεσσάρων από αυτούς να είναι πολλαπλάσιο του 3:

- Οι τέσσερις αριθμοί που θα επιλεγούν να αφήνουν υπόλοιπο 0 όταν διαιρεθούν με το 3. Υπάρχει μόνο ένας τρόπος, δηλαδή να επιλεγούν οι αριθμοί 0, 3, 6 και 9.
- Οι δύο αριθμοί να αφήνουν υπόλοιπο 0, ένας υπόλοιπο 1 και ένας υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθούν με το 3. Άρα, πρέπει να επιλέξουμε δύο από τους αριθμούς 0, 3, 6 και 9. Αυτό μπορεί να γίνει με 6 τρόπους (0 και 3, 0 και 6, 0 και 9, 3 και 6, 3 και 9, 6 και 9). Στη συνέχεια, πρέπει να επιλέξουμε έναν από τους αριθμούς 1, 4 και 7. Αυτό μπορεί να γίνει με 3 τρόπους. Τέλος, πρέπει να επιλέξουμε έναν από τους αριθμούς 2, 5 και 8. Αυτό μπορεί να γίνει με 3 τρόπους. Επομένως, έχουμε συνολικά $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ τρόπους.
- Ένας αριθμός να αφήνει υπόλοιπο 0 (4 τρόποι) και τρεις να αφήνουν υπόλοιπο 1 (1 τρόπος). Συνολικά, έχουμε $4 \cdot 1 = 4$ τρόπους.

- Ένας αριθμός να αφήνει υπόλοιπο 0 (4 τρόποι) και τρεις αριθμοί να αφήνουν υπόλοιπο 2 (1 τρόπος). Συνολικά, έχουμε $4 \cdot 1 = 4$ τρόπους.
- Δύο αριθμοί να αφήνουν υπόλοιπο 1. Αυτό μπορεί να γίνει με 3 τρόπους (1 και 4, 1 και 7, 4 και 7). Δύο αριθμοί να αφήνουν υπόλοιπο 2. Αυτό μπορεί να γίνει με 3 τρόπους (2 και 5, 2 και 8, 5 και 8). Συνολικά, έχουμε $3 \cdot 3 = 9$ τρόπους.

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $1 + 54 + 4 + 4 + 9 = 72$ τρόποι για να επιλέξουμε τους τέσσερις αριθμούς.

