



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2019-A11
Επιμέλεια: Γιώργος Χειμωνίδης

Πρόβλημα

Η Άννα και η Άντρη παίζουν ένα παιχνίδι με 28 σπιρτόξυλα. Παίζουν εναλλάξ και η Άννα ξεκινά πρώτη. Όταν έρθει η σειρά κάθε κοπέλας, αυτή μπορεί να αφαιρέσει 1, 3 ή 4 σπιρτόξυλα. Η κοπέλα που αφαιρεί το τελευταίο σπιρτόξυλο κερδίζει το παιχνίδι. Εξηγήστε κατά πόσο κάποια από τις δύο κοπέλες έχει στρατηγική νίκης.

(Σε ένα παιχνίδι, ένας παίκτης έχει στρατηγική νίκης όταν, ανεξάρτητα από τις κινήσεις που θα κάνει ο άλλος παίκτης, υπάρχουν κινήσεις που μπορεί να κάνει αυτός, οι οποίες του εγγυούνται ότι στο τέλος θα κερδίσει το παιχνίδι.)

Προτεινόμενη Λύση

Ξεκινούμε εξετάζοντας κάποιες περιπτώσεις για μικρό αριθμό σπιρτόξυλων:

- Αν υπάρχει μόνο 1 σπιρτόξυλο, τότε η Άννα το αφαιρεί και κερδίζει το παιχνίδι.
- Αν υπάρχουν μόνο 2 σπιρτόξυλα, τότε η Άννα πρέπει να αφαιρέσει 1, αφού δεν μπορεί να αφαιρέσει 3 ή 4. Άρα, η Άντρη αφαιρεί το 1 σπιρτόξυλο που απομένει και κερδίζει το παιχνίδι.
- Αν υπάρχουν 3 ή 4 σπιρτόξυλα, τότε η Άννα τα αφαιρεί και κερδίζει το παιχνίδι.
- Αν υπάρχουν 5 σπιρτόξυλα, τότε αν η Άννα αφαιρέσει 3 σπιρτόξυλα, η Άντρη μένει με 2 σπιρτόξυλα και δεν μπορεί να κερδίσει, αφού η Άννα δεν μπορούσε να κερδίσει όταν υπήρχαν αρχικά 2 σπιρτόξυλα. Άρα, κερδίζει η Άννα.
- Αν υπάρχουν 6 σπιρτόξυλα, τότε αν η Άννα αφαιρέσει 4 σπιρτόξυλα, η Άντρη μένει με 2 σπιρτόξυλα και κερδίζει η Άννα, όπως και πιο πάνω.
- Αν υπάρχουν 7 σπιρτόξυλα, τότε αν η Άννα αφαιρέσει 1 ή 3 ή 4 σπιρτόξυλα, η Άντρη μένει με 6 ή 4 ή 3 σπιρτόξυλα και μπορεί να κερδίσει, χρησιμοποιώντας τη στρατηγική νίκης της Άννας, όπως πιο πάνω.

Παρατηρούμε ότι γενικά η Άντρη θα έχει στρατηγική νίκης, όταν το παιχνίδι ξεκινά με ν σπιρτόξυλα, η Άννα έχει στρατηγική νίκης, όταν το παιχνίδι ξεκινά με $\nu - 1$, $\nu - 3$ ή

$\nu - 4$ σπιρτόξυλα (αφού αν το παιχνίδι ξεκινά με ν σπιρτόξυλα και η Άννα αφαιρέσει 1 ή 3 ή 4 σπιρτόξυλα, η Άντρη θα ξεκινήσει με $\nu - 1, \nu - 3$ ή $\nu - 4$ σπιρτόξυλα).

Σε κάθε άλλη περίπτωση, η Άννα θα έχει στρατηγική νίκης (Αν η Άννα χάνει το παιχνίδι όταν ξεκινά με $\nu - 1, \nu - 3$ ή $\nu - 4$ σπιρτόξυλα, τότε κερδίζει, όταν το παιχνίδι ξεκινά με ν σπιρτόξυλα, αφού η Άντρη υποχρεωτικά θα ξεκινήσει με $\nu - 1, \nu - 3$ ή $\nu - 4$ σπιρτόξυλα).

Βρίσκουμε τον αρχικό αριθμό σπιρτόξυλων που δίνει στρατηγική νίκης για κάθε κοπέλα, προσθέτοντας ένα καινούργιο νούμερο ν για την Άντρη, όταν οι αριθμοί $\nu - 1, \nu - 3$ και $\nu - 4$ δίνουν στρατηγική νίκης για την Άννα, μέχρι να φτάσουμε στον αριθμό 28.

Άννα: 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 26, 27

Άντρη: 2, 7, 9, 14, 16, 21, 23, 28

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι όταν το παιχνίδι ξεκινά με 28 σπιρτόξυλα, τότε η Άντρη έχει στρατηγική νίκης.