



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2019-A14

Επιμέλεια: Γιώργος Χειμωνίδης

Πρόβλημα

Τρεις μαθητές, ο Ανδρέας, ο Βασίλης και ο Γιώργος ακούνε 4 διαφορετικά τραγούδια. Κανένα από τα 4 τραγούδια δεν άρεσε και στους τρεις. Για καθένα από τα τρία πιθανά ζευγάρια μαθητών (Ανδρέας και Βασίλης ή Ανδρέας και Γιώργος ή Βασίλης και Γιώργος), υπάρχει τουλάχιστον ένα τραγούδι που άρεσε και στους δύο, αλλά όχι στον τρίτο.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό;

Προτεινόμενη Λύση

Η τριάδα (a, b, c) συμβολίζει ότι a τραγούδια αρέσουν στον Ανδρέα και στον Βασίλη, b τραγούδια αρέσουν στον Ανδρέα και στον Γιώργο και c τραγούδια αρέσουν στον Βασίλη και στον Γιώργο.

Από τις υποθέσεις του προβλήματος, έχουμε ότι οι αριθμοί a, b και c είναι θετικοί ακέραιοι και το άθροισμά τους είναι μικρότερο ή ίσο του 4. Αν το άθροισμα ήταν μεγαλύτερο του 4, τότε θα υπήρχε ένα τουλάχιστον τραγούδι που θα άρεσε σε τουλάχιστον δύο δυάδες. Δηλαδή, θα άρεσε και στα τρία παιδιά, κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει.

Συμπεραίνουμε ότι οι μόνες πιθανές τριάδες είναι οι $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ και $(1, 1, 2)$.

Για την τριάδα $(1, 1, 1)$ έχουμε 4 επιλογές για το τραγούδι που άρεσε στον Ανδρέα και στον Βασίλη, 3 επιλογές για το τραγούδι που άρεσε στον Ανδρέα και στον Γιώργο και 2 επιλογές για το τραγούδι που άρεσε στον Βασίλη και στον Γιώργο. Το τέταρτο τραγούδι μπορεί να άρεσε σε ακριβώς ένα από τα τρία παιδιά ή σε κανένα από τα τρία παιδιά. Αυτό μπορεί να γίνει με 4 τρόπους. Συνολικά, η τριάδα $(1, 1, 1)$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 96$ τρόπους.

Για την τριάδα $(2, 1, 1)$ έχουμε 6 επιλογές για τα δύο τραγούδια που άρεσαν στον Ανδρέα και στον Βασίλη (πρώτο - δεύτερο, πρώτο - τρίτο, πρώτο - τέταρτο, δεύτερο - τρίτο, δεύτερο - τέταρτο, τρίτο - τέταρτο), 2 επιλογές για το τραγούδι που άρεσε

στον Ανδρέα και στον Γιώργο και 1 επιλογή για το τραγούδι που άρεσε στον Βασίλη και στον Γιώργο. Ομοίως, για τις τριάδες $(1, 2, 1)$ και $(1, 1, 2)$. Συνολικά, οι τριάδες $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ και $(1, 1, 2)$ μπορούν να παραγματοποιηθούν με $6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 36$ τρόπους.

Αυτό μας δίνει $96 + 36 = 132$ διαφορετικούς τρόπους.

