



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2019-B17

Επιμέλεια: Γιώργος Χειμωνίδης

Πρόβλημα

Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x και y είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $3x + 4y$ και $4x + 3y$ να είναι τέλεια τετράγωνα, τότε να δείξετε ότι οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια του 7.

Πηγή: JBMO 2004

Προτεινόμενη Λύση

Από τα δεδομένα του προβλήματος, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί a και b τέτοιοι, ώστε:

$$4x + 3y = a^2, \quad 3x + 4y = b^2$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις, παίρνουμε ότι:

$$7(x + y) = a^2 + b^2$$

Η διαίρεση του τετραγώνου κάποιου θετικού ακεραίου με το 7 μας αφήνει τα πιο κάτω υπόλοιπα:

- Αν ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε και το τετράγωνο του είναι πολλαπλάσιο του 7.
- Αν αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με το 7, τότε και το τετράγωνο του αφήνει υπόλοιπο 1.
- Αν αφήνει υπόλοιπο 2, τότε το τετράγωνο του αφήνει υπόλοιπο 4.
- Αν αφήνει υπόλοιπο 3, τότε το τετράγωνο του αφήνει υπόλοιπο 2.
- Αν αφήνει υπόλοιπο 4, τότε το τετράγωνο του αφήνει υπόλοιπο 2.
- Αν αφήνει υπόλοιπο 5, τότε το τετράγωνο του αφήνει υπόλοιπο 4.
- Αν αφήνει υπόλοιπο 6, τότε το τετράγωνο του αφήνει υπόλοιπο 1.

Βλέπουμε ότι τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός τέλειου τετραγώνου με το 7 είναι 0, 1, 2 και 4.

Άρα, για να είναι ο αριθμός $a^2 + b^2$ πολλαπλάσιο του 7, πρέπει οι αριθμοί a^2 και b^2 να είναι πολλαπλάσια του 7 και, κατά συνέπεια, οι αριθμοί a και b να είναι πολλαπλάσια του 7.

Δηλαδή, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι p και q τέτοιοι, ώστε:

$$a = 7p, \quad b = 7q$$

Άρα:

$$7(x + y) = (7p)^2 + (7q)^2 \Rightarrow x + y = 7(p^2 + q^2)$$

Συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $x + y$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Επίσης:

$$4x + 3y = a^2 = 49p^2 \Rightarrow 3(x + y) + x = 49p^2$$

Αφού ο αριθμός $x + y$ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε, από την πιο πάνω σχέση, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός x είναι πολλαπλάσιο του 7.

Ομοίως:

$$3x + 4y = a^2 = 49q^2 \Rightarrow 3(x + y) + y = 49q^2$$

Αφού ο αριθμός $x + y$ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε, από την πιο πάνω σχέση, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός y είναι πολλαπλάσιο του 7.