



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2019-C06
Επιμέλεια: Γιώργος Χειμωνίδης

Πρόβλημα

Αν $A = \alpha\beta\gamma\delta$ είναι ένας τετραψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός με $\alpha \neq 0$, τότε ορίζουμε τον αριθμό:

$$B = \alpha\beta\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \gamma\delta + \delta$$

Για παράδειγμα, αν $A = 4089$, τότε $B = 4089 + 089 + 89 + 9 = 4276$.

Αν $B = 2014$, τότε να υπολογίσετε τον αριθμό A .

Προτεινόμενη Λύση

Έχουμε ότι:

$$B = \alpha\beta\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \gamma\delta + \delta = 2014$$

Επίσης:

$$\alpha\beta\gamma\delta = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta, \quad \beta\gamma\delta = 100\beta + 10\gamma + \delta, \quad \gamma\delta = 10\gamma + \delta$$

Άρα:

$$\begin{aligned} B &= (1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta) + (100\beta + 10\gamma + \delta) + (10\gamma + \delta) + \delta \\ &= 1000\alpha + 200\beta + 30\gamma + 4\delta = 2014 \end{aligned}$$

Προφανώς, $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2$.

Αν $\alpha = 2$, τότε έχουμε ότι:

$$200\beta + 30\gamma + 4\delta = 14 \quad \text{ή} \quad 100\beta + 15\gamma + 2\delta = 7$$

Έπεται ότι $\beta = \gamma = 0$ και $2\delta = 7$, που σημαίνει ότι το ψηφίο δ δεν είναι ακέραιος αριθμός, κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 1$.

Αυτό μας δίνει ότι:

$$1000 + 200\beta + 30\gamma + 4\delta = 2014$$

Συνεπώς,

$$200\beta + 30\gamma + 4\delta = 1014$$

ή ισοδύναμα:

$$100\beta + 15\gamma + 2\delta = 507$$

Τώρα, αφού

$$0 \leq \gamma \leq 9 \text{ και } 0 \leq \delta \leq 9,$$

τότε:

$$0 \leq 15\gamma + 2\delta \leq 15 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 153$$

Αφού το 100β είναι πολλαπλάσιο του 100 και $0 \leq 15\gamma + 2\delta \leq 153$, τότε $100\beta = 400$ ή $100\beta = 500$.

Άρα:

$$15\gamma + 2\delta = 507 - 400 = 107 \text{ ή } 15\gamma + 2\delta = 507 - 500 = 7$$

- Αν $15\gamma + 2\delta = 7$, τότε $\gamma = 0$ και $2\delta = 7$, που δεν μπορεί να συμβαίνει.
- Έχουμε ότι $15\gamma + 2\delta = 107$ και κατά συνέπεια $100\beta = 400$. Δηλαδή, $\beta = 4$.

Επίσης, αφού ο $15\gamma + 2\delta = 107$ είναι περιττός αριθμός και ο 2δ είναι άρτιος, τότε ο 15γ είναι περιττό πολλαπλάσιο του 15. Τα περιττά πολλαπλάσια του 15, μικρότερα του 107, είναι τα 15, 45, 75 και 105.

Έτσι, αφού $0 \leq 2\delta \leq 18$, τότε $15\gamma = 105$. Άρα, $\gamma = 7$ και $\delta = 1$.

Τελικά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $A = 1471$.

Όντως, αν $A = 1471$, τότε $B = 1471 + 471 + 71 + 1 = 2014$.