



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2019-C10

Επιμέλεια: Γιώργος Χειμωνίδης

Πρόβλημα

Έξι φίλοι θα ανταλλάξουν βιβλία μεταξύ τους. Κάθε φίλος θα δώσει ένα βιβλίο σε κάποιο φίλο του και θα πάρει ένα βιβλίο από κάποιο άλλο φίλο του. Δύο φίλοι δεν μπορούν να ανταλλάξουν βιβλία μεταξύ τους. Με πόσους τρόπους μπορούν οι έξι φίλοι να ανταλλάξουν τα βιβλία τους;

Προτεινόμενη Λύση

Θεωρούμε έναν από τους έξι φίλους και τον ονομάζουμε Α. Ο Α πρέπει να δώσει ένα βιβλίο σε κάποιον από τους φίλους του, ας πούμε τον Β. Ο Β δεν μπορεί να δώσει το δικό του βιβλίο πίσω στον Α. Επομένως, πρέπει να δώσει το βιβλίο του σε έναν άλλο φίλο, ας πούμε τον Γ. Τώρα, ο Γ δεν μπορεί να δώσει πίσω το βιβλίο του στον Β. Έτσι, μπορεί να το δώσει είτε στον Α είτε σε έναν άλλο φίλο, ας πούμε τον Δ.

- Στην πρώτη περίπτωση, καθένας από τους Α, Β και Γ έχουν πάρει και έχουν δώσει ένα βιβλίο. Άρα, ο Δ πρέπει να δώσει το βιβλίο του σε έναν άλλο φίλο, ας πούμε τον Ε. Ο Ε δεν μπορεί να δώσει πίσω το βιβλίο του στον Δ και ούτε σε έναν από τους Α, Β ή Γ. Άρα, πρέπει να το δώσει σε έναν άλλο φίλο, ας πούμε τον Ζ. Τώρα, ο Ζ δεν μπορεί να δώσει το βιβλίο του πίσω στον Ε και ούτε σε ένα από τους Α, Β ή Γ. Κατά συνέπεια, θα δώσει το βιβλίο του στον Δ. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow A \text{ και } \Delta \rightarrow E \rightarrow Z \rightarrow \Delta$$

- Στην δεύτερη περίπτωση, ο Δ δεν μπορεί να δώσει το βιβλίο του πίσω στον Γ και ούτε στον Β, αφού αυτοί ήδη έχουν πάρει βιβλίο. Άρα, ο Δ μπορεί να δώσει το βιβλίο του στον Α ή στον Ε. Τώρα, αν το δώσει στον Α, τότε οι Α, Β, Γ και Δ θα έχουν όλοι πάρει και δώσει βιβλίο. Άρα, οι Ε και Ζ θα πρέπει να ανταλλάξουν μεταξύ τους βιβλία, κάτι που απαγορεύεται. Δηλαδή, ο Δ πρέπει υποχρεωτικά να δώσει το βιβλίο του στον Ε. Μόνο δύο φίλοι δεν έχουν πάρει βιβλίο ακόμη, οι Α και Ζ. Ο Ε δεν μπορεί να δώσει το βιβλίο του στον Α, γιατί σε αυτή την περίπτωση ο Ζ δεν θα μπορεί να δώσει, ούτε να πάρει βιβλίο. Άρα, ο Ε πρέπει

να δώσει το βιβλίο του στον Z και ο Z να δώσει το βιβλίο του στον A. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow E \rightarrow Z \rightarrow A$$

Σε κάθε περίπτωση, δεν μας ενδιαφέρει ποιος θα είναι ο πρώτος φίλος αφού π.χ. τα πιο κάτω είναι όλα τα ίδια:

$$A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow A, \quad B \rightarrow \Gamma \rightarrow A \rightarrow B, \quad \Gamma \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \Gamma$$

- Στην πρώτη περίπτωση, υπολογίζουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να δημιουργήσουμε τις δύο τριάδες. Σίγουρα ο A θα βρίσκεται με μία από τις δύο τριάδες. Η δεύτερη τριάδα δημιουργείται από τους τρεις φίλους που δεν θα είναι στην ομάδα του A. Ο A μπορεί να είναι σε 10 διαφορετικές τριάδες, τις ABΓ, ABΔ, ABE, ABZ, AΓΔ, AΓE, AΓZ, AΔE, AΔZ και AEZ. Στην πρώτη τριάδα, αφού επιλεγεί τυχαία ο πρώτος φίλος, ο δεύτερος μπορεί να επιλεγεί με δύο τρόπους (θα είναι ένας από τους άλλους δύο) και ο τρίτος φίλος μπορεί να επιλεγεί με έναν τρόπο (θα είναι ο φίλος που έμεινε). Τα ίδια ισχύουν και για τη δεύτερη τριάδα. Συνολικά, η πρώτη περίπτωση μπορεί να πραγματοποιηθεί με $10 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 40$ τρόπους.
- Στην δεύτερη περίπτωση, αφού επιλεγεί τυχαία ο πρώτος φίλος, ο δεύτερος μπορεί να επιλεγεί με 5 τρόπους (θα είναι ένας από τους άλλους 5 φίλους), ο τρίτος φίλος μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους (θα είναι ένας από τους 4 εναπομείναντες φίλους), ο τέταρτος φίλος μπορεί να επιλεγεί με 3 τρόπους, ο πέμπτος φίλος μπορεί να επιλεγεί με 2 τρόπους και ο έκτος φίλος μπορεί να επιλεγεί με 1 τρόπο. Συνολικά, η δεύτερη περίπτωση μπορεί να πραγματοποιηθεί με $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ τρόπους.

Τελικά, καταλήγουμε στο ότι οι έξι φίλοι μπορούν να ανταλλάξουν τα βιβλία τους με $120 + 40 = 160$ τρόπους.