



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2019-C13

Επιμέλεια: Γιώργος Χειμωνίδης

Πρόβλημα

Πόσοι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 100 και του 999 έχουν την ιδιότητα ότι κάποια αναδιάταξη των ψηφίων τους δίνει τριψήφιο αριθμό πολλαπλάσιο του 11 μεταξύ του 100 και του 999;

Για παράδειγμα, οι αριθμοί 121 και 211 έχουν αυτήν την ιδιότητα.

Προτεινόμενη Λύση

Θα ασχοληθούμε με τα πολλαπλάσια του 11 μεταξύ του 100 και του 999 και θα βρούμε πόσες αναδιατάξεις μεταξύ του 100 και του 999 έχει το καθένα από αυτά.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) Τα τρία ψηφία του αριθμού να είναι τα ίδια.

Εύκολα, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποιο πολλαπλάσιο του 11 ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς.

(β) Τα δύο ψηφία του αριθμού να είναι τα ίδια και το τρίτο να είναι διαφορετικό.

Υπάρχουν 8 πολλαπλάσια του 11, των οποίων κανένα από τα ψηφία δεν είναι μηδέν, με αυτήν την ιδιότητα, τα 121, 242, 363, 484, 616, 737, 858 και 979. Καθένας από αυτούς τους αριθμούς μας δίνει 3 αναδιατάξεις (π.χ. το 121 μας δίνει επίσης το 211 και το 112). Άρα, υπάρχουν $3 \cdot 8 = 24$ αριθμοί σε αυτήν την περίπτωση.

Επίσης, υπάρχουν 9 πολλαπλάσια του 11, των οποίων το ένα ψηφίο να είναι μηδέν, με αυτήν την ιδιότητα, τα 110, 220, 330, 440, 550, 660, 770, 880 και 990. Καθένας από αυτούς τους αριθμούς μας δίνει 2 αναδιατάξεις, αφού το πρώτο ψηφίο δεν μπορεί να είναι μηδέν (π.χ. το 110 μας δίνει και το 101). Άρα, υπάρχουν $2 \cdot 9 = 18$ αριθμοί σε αυτήν την περίπτωση.

(γ) Όλα τα ψηφία του αριθμού να είναι διαφορετικά.

Ο πιο μικρός τριψήφιος, ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 11 είναι ο 110, ενώ ο πιο μεγάλος είναι ο 990. Επομένως, υπάρχουν $\frac{990 - 110}{11} + 1 = 81$ τριψήφιοι τέτοιοι

αριθμοί. Με βάση τις προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε $81 - 8 - 9 = 64$ τριψήφιους αριθμούς, οι οποίοι είναι πολλαπλάσια του 11, με διαφορετικά ψηφία.

Τώρα, 8 από αυτούς τους αριθμούς έχουν το μηδέν ως ένα από τα ψηφία τους. Οι αριθμοί αυτοί είναι οι 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803 και 902. Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 605, 704, 803 και 902 είναι αναδιατάξεις των αριθμών 506, 407, 308 και 209, αντίστοιχα. Καθένας από τους αριθμούς 209, 308, 407 και 506 μας δίνει 4 αναδιατάξεις (π.χ. ο αριθμός 209 μας δίνει επίσης τους αριθμούς 290, 902 και 920). Άρα, έχουμε επιπλέον $4 \cdot 4 = 16$ αριθμούς.

Ακόμα, έχουμε $64 - 8 = 56$ τριψήφια πολλαπλάσια του 11, των οποίων τα ψηφία είναι διαφορετικά και κανένα από αυτά τους δεν είναι μηδέν. Επίσης, παρατηρούμε ότι αν ο αριθμός $AB\Gamma$ είναι πολλαπλάσιο του 11, τότε και ο αριθμός ΓBA θα είναι πολλαπλάσιο του 11. (Για να είναι ο αριθμός $AB\Gamma$ πολλαπλάσιο του 11, πρέπει ο αριθμός $A - B + \Gamma$ να είναι πολλαπλάσιο του 11.) Επομένως, από τους 56 αριθμούς, οι 28 είναι αναδιάταξη των άλλων 28. Καθένας από αυτούς τους 28 αριθμούς μας δίνει 6 αναδιατάξεις (π.χ. ο αριθμός 132 μας δίνει επίσης τους αριθμούς 123, 321, 312, 213 και 231). Άρα, έχουμε άλλους $28 \cdot 6 = 168$ αριθμούς.

Έτσι, καταλήγουμε στο ότι υπάρχουν $24 + 18 + 16 + 168 = 226$ ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 100 και του 999, οι οποίοι έχουν την ιδιότητα ότι κάποια αναδιάταξη των ψηφίων τους είναι πολλαπλάσιο του 11 μεταξύ του 100 και του 999.