



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κωδικός: GYM2021-A01
Επιμέλεια: Γιάννης Ιωάννου

Πρόβλημα

Να δείξετε ότι αν το άθροισμα των ψηφίων ενός αριθμού είναι πολλαπλάσιο του 3 ή του 9, τότε ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.

Προτεινόμενη Λύση

Θα το δείξουμε για πενταψήφιο αριθμό. Η απόδειξη για οποιοδήποτε πλήθος ψηφίων είναι παρόμοια.

Έστω

$$A = \overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$$

Είναι γνωστό ότι στο δεκαδικό σύστημα αναλύεται σε:

$$A = \overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} = 10000a_5 + 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1$$

Κάθε ένας αριθμός από τις δυνάμεις του 10 γράφεται ως

$$10 = 9 + 1, \quad 100 = 99 + 1, \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Συνεπώς:

$$A = (9999 + 1)a_5 + (999 + 1)a_4 + (99 + 1)a_3 + (9 + 1)a_2 + a_1$$

Επειδή οι αριθμοί 9, 99, 999, ... διαιρούνται με το 9, οποιοδήποτε πολλαπλάσιό τους διαιρείται με το 9. Συνεπώς:

$$A = 9\lambda + (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1)$$

όπου λ ακέραιος αριθμός.

Επειδή το 9λ είναι πολλαπλάσιο και του 3 και του 9, για να διαιρείται ο A με το 3 ή το 9 θα πρέπει το άθροισμα $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$ των ψηφίων του A να διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.