ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ IMC STAGE II

ΑΠΡΙΛΗΣ 2019

Χρόνος Εξέτασης: **2ώρες**

Ημερομηνία: ***17/04/2019*** *Ώρα εξέτασης:* ***15:45 -17:45***

Να απαντήσετε τα θέματα 1 και 2 **αιτιολογώντας πλήρως** τις απαντήσεις σας. Το κάθε θέμα είναι **10 μονάδες.**

ΘΕΜΑ 1:

Το κιβώτιο Α έχει διπλάσιο αριθμό μήλων από ότι το κιβώτιο Β. Το 12% των μήλων στο κιβώτιο Α μεταφέρεται στο κιβώτιο Γ. Το 20% των μήλων στο κιβώτιο Β μεταφέρεται στο κιβώτιο Γ. Μετά την μεταφορά των μήλων, υπάρχουν τώρα 488 μήλα στο κιβώτιο Γ που είναι 22% περισσότερα από τον αρχικό αριθμό των μήλων στο κιβώτιο Γ. Πόσα μήλα υπήρχαν στην αρχή στο κιβώτιο Α;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

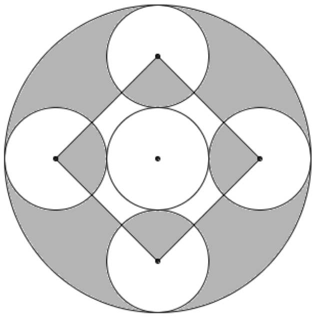
Έστω στο κιβώτιο Β έχει x μήλα και στο κιβώτιο Α 2x μήλα. Μεταφέρεται το 20% των μήλων του Β και το 12% των διπλάσιων του Β που είναι στο Α δηλαδή μεταφέρεται το $20\% + 2\cdot 12\% = 44\%$ των x μήλων του κιβωτίου Β στο κιβώτιο Γ. Αφού τα μήλα στο κιβώτιο Γ αυξήθηκαν κατά 22% τότε τα 488 μήλα που υπάρχουν τώρα στο Γ είναι το 122% των αρχικών μήλων του Γ άρα στην αρχή υπήρχαν $\frac{488}{122}\times 100 = 400$ μήλα. Άρα προστέθηκαν στο Γ, $488 - 400 = 88$ μήλα που αντιστοιχούν στο 44% των x μήλων του Β.

Τότε $\frac{88}{44}\times 100 = 200$ μήλα. Συνεπώς στο κουτί Β υπήρχαν 200 μήλα και στο κουτι Α τα διπλάσια του Β δηλαδή 400 μήλα

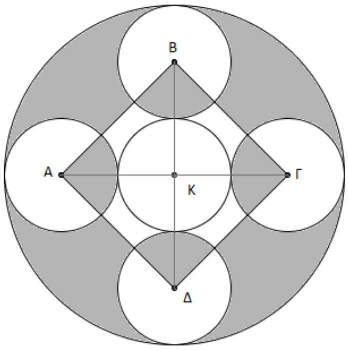
Απάντηση: 400 μήλα

ΘΕΜΑ 2:

Δίνεται κύκλος μέσα στον οποίο υπάρχουν 5 κύκλοι ακτίνας 1cm. Όλα τα σημεία τομής είναι σημεία επαφής μεταξύ των κύκλων. Το τετράπλευρο που έχει ως κορυφές τα κέντρα των κύκλων είναι τετράγωνο. Να βρείτε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας,όπως φαίνεται στο σχήμα. (Να χρησιμοποιηθεί η τιμή $\pi = \frac{22}{7}$)



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ



Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα 3cm το $\mathrm{AK{=}KB{=}K\Gamma{=}K\Delta{=}1{+}1{=}2cm}$ και οι γωνίες $\mathrm{AB\Gamma{=}B\Gamma\Delta{=}\Gamma\Delta A{=}\Delta AB{=}90^{o}}$.

Το Εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας είναι ίσο με το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου ακτίνας 3cm πλήν το εμβαδόν των τεσσάρων κύκλων με ακτίνα 1cm πλήν το εμβαδόν του τετραγώνου συν 2 φορές το εμβαδόν των τεσσάρων κυκλικών τομέων που ο κάθε ένας ισούται με το $\frac{1}{4}$ του κύκλου με ακτίνα 1cm.

$$E_1 = E_{Κύκλου} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

$$E_2 = E_{Κύκλου} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

$$E_{AB\Gamma\Delta} = 4E_{ABK} = 4 \cdot \frac{(AK)\cdot(KB)}{2} = 4 \cdot \frac{2\cdot 2}{2} = 8cm^2$$

$$E_3 = E_{\text{Κύκλου τομέα}} = \frac{1}{4}\pi \cdot R^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 = \frac{1}{4}\pi$$

$$\begin{aligned} E = E_1 - 4\cdot E_2 - E_{ΑΒΓΔ} + 4\cdot 2\cdot E_3 &= 9\pi - 4\cdot\pi - 8 + 4\cdot 2\cdot\frac{1}{4}\pi \\ &= 9\pi - 4\pi + 2\pi - 8 = 7\pi - 8 \\ &= 7\cdot\frac{22}{7} - 8 = 22 - 8 = 14\text{cm}^2 \end{aligned}$$

<u>Απάντηση:</u> 14cm^2

Να απαντήσετε τα θέματα 3,4,5 και 6 **γράφοντας μόνο την τελική απάντηση**. Το κάθε θέμα είναι **5 μονάδες.**

<u>ΘΕΜΑ 3:</u>

Ο Γιάννης , ο πατέρας και ο παππούς του συζητούν τις ηλικίες τους. Ο παππούς λέει ότι είναι μικρότερος από 100 χρονών και η ηλικία του είναι ζυγός αριθμός. Ο πατέρας λέει ότι αν αντιστρέψουμε τη σειρά των ψηφίων της ηλικίας του παππού θα βρούμε την ηλικία του. Ο Γιάννης λέει ότι αν προσθέσουμε τα ψηφία της ηλικίας του πατέρα του θα βρούμε την ηλικία του. Αν το άθροισμα των ηλικιών του Γιάννη, του παππού και του πατέρα είναι 144 να βρείτε πόσο χρονών είναι ο παππούς.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ</u>

Αφού ο παππούς είναι μικρότερος από 100 χρόνων τότε η ηλικία του είναι διψήφιος αριθμός και έστω x το ψηφίο των δεκάδων και y των μονάδων. Άρα ο παππούς είναι $\overline{xy} = 10x + y$ χρονών , ο πατέρας είναι $\overline{yx} = 10y + x$ χρονών και ο γιος είναι $y + x$.

Αν προσθέσουμε τις τρεις ηλικίες θα έχουν άθροισμα 144

δηλαδή $10x + y + 10y + x + y + x = 144$ τότε $12x + 12y = 144$ τότε $x + y = 12$.

Οι δυνατές τιμές των x, y είναι: $(9,3)$ $(8,4)$, $(7,5)$ $(6,6)$

Οι τιμές $(9,3)$, $(7,5)$ απορρίπτονται αφού η ηλικία του παππού είναι ζυγός αριθμός, όπως και $(6,6)$ γιατί παππούς και γιός θα είχαν ίδια ηλικία.

Τότε η ηλικία του παππού είναι 84 χρονών.

<u>Απάντηση:</u> 84 χρόνων

ΘΕΜΑ 4:

Ο Αντρέας και η Μαρία ανεβαίνουν μια σκάλα. Ο Αντρέας ανεβαίνει τα σκαλιά πέντε, πέντε και η Μαρία ανεβαίνει τα σκαλιά δύο, δύο. Στο τελευταίο βήμα ο Αντρέας ανεβαίνει όσα σκαλιά μένουν αν αυτά είναι λιγότερα από πέντε και η Μαρία ανεβαίνει το τελευταίο σκαλί αν της έχει μείνει μόνο ένα σκαλί. Αν για να ανέβει στο τελευταίο σκαλοπάτι ο Αντρέας κάνει 19 βήματα λιγότερα από τη Μαρία, να βρείτε το άθροισμα όλων των πιθανών σκαλιών που μπορεί να έχει η σκάλα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι για κάθε 10 σκαλιά η Μαρία κάνει 5 βήματα και ο Αντρέας 2. Άρα, μετά από 60 σκαλιά η Μαρία θα έχει κάνει 30 βήματα και ο Αντρέας 12. Δηλαδή, μετά από 60 σκαλιά ο Αντρέας έχει κάνει 18 βήματα λιγότερα από τη Μαρία. Αν η σκάλα έχει 63 σκαλιά η Μαρία θα κάνει 32 βήματα και ο Αντρέας 13, δηλαδή 19 λιγότερα. Το ίδιο αν η σκάλα έχει 64 σκαλιά. Άρα, η σκάλα μπορεί να έχει 63 ή 64 σκαλιά. Αν η σκάλα έχει 65 σκαλιά η Μαρία θα κάνει 33 βήματα και ο Αντρέας 13, δηλαδή 20 λιγότερα. Άρα η σκάλα δεν μπορεί να έχει 65 σκαλιά. Αν η σκάλα έχει 66 σκαλιά η Μαρία θα κάνει 33 βήματα και ο Αντρέας 14, δηλαδή 19 λιγότερα. Άρα, η σκάλα μπορεί να έχει 66 σκαλιά. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι για 67 σκαλιά ή περισσότερα ο Αντρέας θα κάνει τουλάχιστον 20 βήματα λιγότερα από τη Μαρία.

Καταλήγουμε, ότι η σκάλα μπορεί να έχει 63, 64 ή 66 σκαλιά. Τα άθροισμα αυτών των αριθμών είναι 193 που είναι και η ζητούμενη απάντηση.

Απάντηση: 193

ΘΕΜΑ 5:

Ενας αριθμός αρχίζει με μερικά δυάρια (2) ακολουθούμενα από τριάρια (3) και τελειώνει με πεντάρια (5). Ένας δεύτερος αριθμός αρχίζει με τριάρια (3) ακολουθούμενα από πεντάρια (5) και τελειώνει με δυάρια (2). Το πλήθος των δυαριών στον πρώτο αριθμό είναι ίσο με το πλήθος των πενταριών στον δεύτερο αριθμό. Το πλήθος των τριαριών στον πρώτο αριθμό είναι ίσο με το πλήθος των δυαριών στον δεύτερο αριθμό. Το πλήθος των πενταριών στον πρώτο αριθμό είναι ίσο με το πλήθος των τριαριών στον δεύτερο αριθμό. Το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών αρχίζει με τα ψηφία 55577 ακολουθούμενα από μερικά οκτάρια (8) και τελειώνει με 5777. Να βρείτε το πλήθος των οκταριών που υπάρχουν στο άθροισμα αυτών των δύο αριθμών.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Έστω ο πρώτος αριθμός 222…22233…..33555

δεύτερος αριθμός 333…3355…52…2222

και το άθροισμα 55578..8..85777

- Αφού ο πρώτος αριθμός τελειώνει σε πεντάρια ο δευτέρος τελειώνει σε δυάρια και το άθροισμα τελειώνει σε 85777 συμπεραίνουμε ότι ο πρώτος έχει στο τέλος 3 πεντάρια και άρα ο δεύτερος αριθμός έχει 3 τριάρια στην αρχή και ο δεύτερος 4 δυάρια και άρα ο πρώτος 4 τριάρια.

- Αφού το άθροισμα αρχίζει με 55578 και ο δεύτερος αριθμός έχει 3 τριάρια στην αρχή ακολουθούμενα από πεντάρια συμπεραίνουμε ότι ο πρώτος αριθμός έχει 4 δυάρια ακολουθούμενα από 4 τριάρια. Έτσι στο άθροισμα θα υπάρχουν 3 οκτάρια.

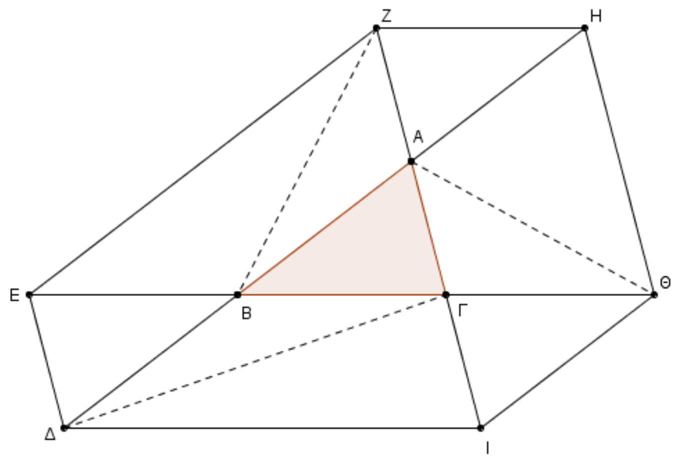
Ο πρώτος αριθμός	22223333555
δεύτερος αριθμός	33355552222
άθροισμα	55578885777

Απάντηση: 3 Οκτάρια

ΘΕΜΑ 6:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την κάθε πλευρά του και από τα δύο μερη και παίρνουμε τμήματα ίσα με την πλευρά του. Δηλαδή την ΑΒ προς το Β και προς το Α και παίρνουμε ΒΔ=ΒΑ=ΑΗ . Ομοίως ΒΕ=ΒΓ=ΓΘ και ΑΖ=ΑΓ=ΓΙ. Σχηματίζεται το εξάγωνο ΔΕΖΗΘΙ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12cm^2 να υπολογίσετε το εμβαδόν του εξαγώνου.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ



Τα τρίγωνα ΒΓΑ και ΒΑΖ έχουν ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη

$E_{BAZ} = E_{B\Gamma A}$.

Τα τρίγωνα ΕΖΒ και ΒΖΓ έχουν ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη άρα

$E_{EBZ} = E_{BZ\Gamma} = 2E_{B\Gamma A}$

Τα τρίγωνα ΒΖΑ και ΑΖΗ έχουν ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη $E_{BZA} = E_{AZH} = E_{AB\Gamma}$.

Ομοίως $E_{ΑΗΘ} = E_{ΒΘΗ} = 2E_{ΒΓΑ}$, $E_{ΙΘΓ} = E_{ΓΘΑ} = E_{ΑΒΓ}$ και

$E_{ΙΔΓ} = E_{ΓΔΑ} = 2E_{ΒΓΑ}$, $E_{ΕΔΒ} = E_{ΒΔΓ} = E_{ΑΒΓ}$

Τότε $E_{ΔΕΖΗΘΙ} = E_{ΔΕΒ} + E_{ΕΒΖ} + E_{ΖΒΑ} + E_{ΖΗΑ} + E_{ΑΗΘ} + E_{ΑΘΓ} + E_{ΘΓΙ} + E_{ΓΙΔ} + E_{ΔΓΒ} + E_{ΑΒΓ}$

$E_{ΔΕΖΗΘΙ} = 13 \cdot E_{ΑΒΓ} = 13 \cdot 12 = 156 cm^2$

Απάντηση: $156 cm^2$