ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ IMC STAGE III

ΜΑΡΤΗΣ 2019

Χρόνος Εξέτασης: **2 ώρες**

Ημερομηνία: ***6/03/2019*** *Ώρα εξέτασης:* ***15:45 -17:45***

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, για το 1 και 2 **αιτιολογώντας πλήρως** τις απαντήσεις σας και για το 3,4,5,6 γράφοντας **μόνο την απάντηση**.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Να απαντήσετε τα θέματα 1 και 2 **αιτιολογώντας πλήρως** τις απαντήσεις σας. Το κάθε θέμα είναι **10 μονάδες.**

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1:

Αν x, y και z είναι θετικοί αριθμοί έτσι ώστε:

$x+\frac{1}{y}=4$, $y+\frac{1}{z}=1$, $z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$, να βρείτε την τιμή $x\cdot y\cdot z$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις τρεις ισότητες:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\times\left(y+\frac{1}{z}\right)\times\left(z+\frac{1}{x}\right)=4\times1\times\frac{7}{3}$$

τότε $\left(xy+\frac{x}{z}+1+\frac{1}{y\cdot z}\right)\times\left(z+\frac{1}{x}\right)=\frac{28}{3}$

τότε $xyz+x+z+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x\cdot y\cdot z}=\frac{28}{3}$

τότε $xyz+4+1+\frac{7}{3}+\frac{1}{x\cdot y\cdot z}=\frac{28}{3}$ τότε $x\cdot y\cdot z+\frac{1}{x\cdot y\cdot z}=\frac{28}{3}-\frac{22}{3}$

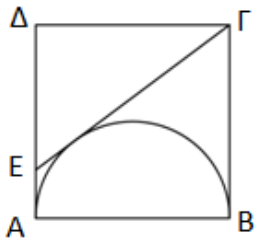
τότε $x\cdot y\cdot z+\frac{1}{x\cdot y\cdot z}=2$

τότε $(x\cdot y\cdot z)^2-2(x\cdot y\cdot z)+1=0$

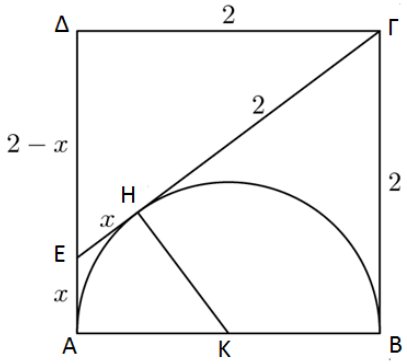
τότε $(x\cdot y\cdot z-1)^2=0$ τότε $x\cdot y\cdot z=1$

ΘΕΜΑ 2:

Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά μήκους 2cm. Μέσα στο τετράγωνο κατασκευάζεται ημικύκλιο με διάμετρο την πλευρά $ΑΒ$. Από την κορυφή $Γ$ του τετραγώνου φέρνουμε εφαπτομένη στο ημικύκλιο που τέμνει την $ΑΔ$ στο $Ε$. Να βρείτε το μήκος της $ΔΕ$.



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ



'Εστω Η το σημείο επαφής της εφαπτομένης ΓΕ με το ημικύκλιο και Κ το κέντρο του ημικυκλίου.

Από το Ε άγονται δύο εφαπτομένες προς το ημικύκλιο η $ΕΗ$ και $ΕΑ$ και από το θεώρημα συνεπάγεται $ΕΑ = ΕΗ = x$

Από το Γ άγονται δύο εφαπτομένες προς το ημικύκλιο η $ΓΗ$ και $ΓΒ$ με $ΓΒ = ΓΗ = 2cm$.

Έτσι $ΔΕ = 2 - x$ και $ΓΕ = 2 + x$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΓΕ$ ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα έτσι:

$(ΔΕ)^2 + (ΔΓ)^2 = (ΓΕ)^2$ τότε $2^2 + (2-x)^2 = (2+x)^2$ τότε $2^2 + 4 - 4x + x^2 = 4 + 4x + x^2$

$8x = 4$ τότε $x = \frac{1}{2}$ τότε $ΔΕ = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}cm$

Να απαντήσετε τα θέματα 3,4,5 και 6 **γράφοντας μόνο την τελική απάντηση**. Το κάθε θέμα είναι **5 μονάδες.**

ΘΕΜΑ 3:

Αν $A = 201820182018 \times 2019201920192019$ και

$B = 201920192019 \times 2018201820182018$ να βρείτε την τιμή του $A - B$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

$$A - B = 201820182018 \times 2019201920192019 - 201920192019 \times 2018201820182018 =$$

$$201820182018 \times \left(2019 \times 10^{12} + 201920192019\right) - 201920192019 \times \left(2018 \times 10^{12} + 201820182018\right) =$$

$$201820182018 \times 2019 \times 10^{12} - 201920192019 \times 2018 \times 10^{12} =$$

$$\left(2018 \times 10^{8} + 20182018\right) \times 2019 \times 10^{12} - \left(2019 \times 10^{8} + 20192019\right) \times 2018 \times 10^{12} =$$

$$20182018 \times 2019 \times 10^{12} - 20192019 \times 2018 \times 10^{12} =$$

$$\left(2018 \times 10^{4} + 2018\right) \times 2019 \times 10^{12} - \left(2019 \times 10^{4} + 2019\right) \times 2018 \times 10^{12} =$$

$$2018 \times 2019 \times 10^{16} + 2018 \times 2019 \times 10^{12} - 2019 \times 2018 \times 10^{16} - 2019 \times 2018 \times 10^{12} = 0$$

Απάντηση: **0**

ΘΕΜΑ 4:

Ένας τετραψήφιος αριθμός είναι τέλειο τετράγωνο. Αν το ψηφίο των χιλιάδων του μειωθεί κατά 3 και το ψηφίο των μονάδων του αυξηθεί κατά 3, θα προκύψει τετραψήφιος αριθμός ο οποίος είναι επίσης τέλειο τετράγωνο. Να βρείτε τον αρχικό τετραψήφιο αριθμό.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

'Εστω ο τετρψήφιος αριθμός είναι ο $A = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ τότε

$A = \alpha \times 1000 + \beta \times 100 + \gamma \times 10 + \delta = n^2$ και

$B = (\alpha - 3) \times 1000 + \beta \times 100 + \gamma \times 10 + (\delta + 3) = m^2$

Τότε $A - B = [\alpha - (\alpha - 3)] \times 1000 + [\delta - (\delta + 3)] = n^2 - m^2$

$3000 - 3 = n^2 - m^2$ τότε $2997 = n^2 - m^2$

$27 \times 111 = (n - m)(n + m)$

- Αν $27 = (n - m)$ και $111 = (n + m)$ τότε $2n = 138$ τότε $n = 69$
  Άρα $A = n^2 = 69^2 = 4761$
- Αν $9 = (n - m)$ και $333 = (n + m)$ τότε $2n = 342$ τότε $n = 171$
  αλλά $n^2 = 29241$ απορρίπτεται γιατί είναι πενταψήφιος αριθμός
- Αν $3 = (n - m)$ και $999 = (n + m)$ ή $1 = (n - m)$ και $2997 = (n + m)$
  θα δώσουν ακόμα μεγαλύτερους αριθμούς άρα μοναδική λύση $A = 4761$

Απάντηση: $A = 4761$

ΘΕΜΑ 5:

Η Άννα , ο Βασίλης και ο σκύλος τους Ντικ ζουν στο ίδιο σπίτι. Στις 12:00 το μεσημέρι, η Άννα και ο Βασίλης φεύγουν από το σπίτι τους και περπατούν προς την ίδια κατεύθυνση. Η Άννα περπατά με ταχύτητα 4 km/h και ο Βασίλης με ταχύτητα 3 km/h. Στις 12:15 ο σκύλος τους Ντικ, φεύγει από το σπίτι τους και τρέχει με ταχύτητα 6 km/h προς την ίδια κατεύθυνση με την Άννα και τον Βασίλη. Ο σκύλος τρέχει και μόλις φτάνει την Άννα γυρίζει προς τα πίσω, τρέχοντας πάντα με την ίδια ταχύτητα, να συναντήσει τον Βασίλη (θεωρούμε ότι ο Ντικ δε χάνει καθόλου χρόνο όταν αλλάζει κατεύθυνση για να τρέξει από την Άννα στο Βασίλη). Να βρείτε την ώρα που ο Ντικ θα συναντήσει τον Βασίλη.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Στις 12:00 το μεσημέρι ο καθένας βρίσκεται 0 km από το σπίτι.

Στις 12:15 ο Ντικ βρίσκεται 0 km από το σπίτι, η Άννα $\frac{1}{4}\times 4=1$ km από το σπίτι (αφού περπάτησε για ¼ της ώρας με ταχύτητα 4 km/h) και ο Βασίλης βρίσκεται $\frac{1}{4}\times 3=\frac{3}{4}$ km από το σπίτι (αφού περπάτησε για ¼ της ώρας με ταχύτητα 3 km/h).

Στις 12:15 ο Ντικ φεύγει από το σπίτι και τρέχει μέχρι να φτάσει την Άννα. Αφού η Άννα περπατά με ταχύτητα 4 km/h και ο Ντικ τρέχει με ταχύτητα 6 km/h προς την ίδια κατεύθυνση τότε ο Ντικ κινείται 2 km/h γρηγορότερα από την Άννα. Αφού η Άννα στις 12:15 απέχει 1 km από τον Ντικ σημαίνει ότι σε ½ ώρα θα την φτάσει, δηλαδή στις 12:45.

Ο Ντικ στις 12:45 θα βρίσκεται 3 km από το σπίτι (αφού έχει τρέξει για ½ ώρα με ταχύτητα 6 km/h). Ο Βασίλης στις 12:45 θα βρίσκεται $\frac{3}{4}\times 3=\frac{9}{4}$ km από το σπίτι (αφού περπάτησε για ¾ της ώρας με ταχύτητα 3 km/h).

Εκείνη την ώρα ο Ντικ απέχει από το Βασίλη $3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$ km.

Στις 12:45 ο Ντικ γυρίζει στιγμιαία και τρέχει προς το μέρος του Βασίλη. Αφού ο Βασίλης περπατά με ταχύτητα 3 km/h και ο Ντικ τρέχει με ταχύτητα 6 km/h σημαίνει ότι πλησιάζει ο ένας τον άλλο με ταχύτητα 9 km/h.

Άρα, ο Ντικ θα συναντήσει το Βασίλη σε $\frac{1}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{12}$ της ώρας, δηλαδή σε 5 λεπτά.

Συμπεραίνουμε ότι ο Ντικ θα συναντήσει το Βασίλη στις 12:50.

Απάντηση: Ώρα 12:50

ΘΕΜΑ 6:

Στα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού ν δεν υπάρχουν καθόλου 9, υπάρχουν τέσσερα 8, τρία 7, δύο 6 και κάποια άλλα ψηφία. Αν το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού ν είναι 104 και το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $2\times\nu$ είναι 100 να βρείτε πόσες φορές εμφανίζεται το ψηφίο 5 στον αριθμό ν.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Το άθροισμα των γνωστών ψηφίων του αριθμού ν είναι $4\cdot 8+3\cdot 7+2\cdot 6=65$.

Άρα, το άθροισμα των υπόλοιπων ψηφίων του αριθμού ν είναι $104-65=39$.
Ας υποθέσουμε ότι το ψηφίο 5 εμφανίζεται μ φορές στον αριθμό ν. Άρα το άθροισμα των ψηφίων 0 μέχρι 4 θα είναι $39-5\mu$.

Στον αριθμό $2\times\nu$ η συνεισφορά του ψηφίου 8 είναι $1+6=7$ $(2\times 8=16)$, η συνεισφορά του ψηφίου 7 είναι $1+4=5$ $(2\times 7=14)$ και η συνεισφορά του 6 είναι $1+2=3$ $(2\times 6=12)$.
Το άθροισμα των γνωστών ψηφίων του αριθμού $2\times\nu$ είναι $4\cdot 7+3\cdot 5+2\cdot 3=49$.

Κάθε ψηφίο 5 του αριθμού ν συνεισφέρει $1+0=1$ $(2\times 5=10)$ στον αριθμό $2\times\nu$. Άρα αν το ψηφίο 5 εμφανίζεται μ φορές στον αριθμό ν, τότε η συνολική συνεισφορά του στον αριθμό $2\times\nu$ είναι μ. Κάθε ψηφίο από το 0 μέχρι και το 4 συνεισφέρει διπλάσια στον αριθμό $2\times\nu$ σε σχέση με τον αριθμό ν, αφού το γινόμενο τους με το 2 είναι μονοψήφιος αριθμός.

Άρα, $49+\mu+2(39-5\mu)=100\Rightarrow 127-9\mu=100\Rightarrow 9\mu=27\Rightarrow \mu=3$

Καταλήγουμε ότι το ψηφίο 5 εμφανίζεται 3 φορές στον αριθμό ν.

Απάντηση: 3 φορές