



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Β' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ IMC STAGE III
ΑΠΡΙΛΗΣ 2019

Χρόνος Εξέτασης: 2 ώρες

Ημερομηνία: 17/04/2019

Ώρα εξέτασης: 15:45 -17:45

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, για το 1 και 2 **αιτιολογώντας πλήρως** τις απαντήσεις σας και για το 3,4,5,6 γράφοντας **μόνο την απάντηση**.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Να απαντήσετε τα θέματα 1 και 2 **αιτιολογώντας πλήρως** τις απαντήσεις σας. Το κάθε θέμα είναι **10 μονάδες**.

ΘΕΜΑ 1:

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή των n και m , με $n, m > 1$ και $n \neq m$, ώστε όλοι οι ρητοί

αριθμοί $\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n+1}, \frac{m+2}{n+2}, \frac{m+3}{n+3}, \frac{m+4}{n+4}, \frac{m+5}{n+5}$ να είναι ακέραιοι.

ΘΕΜΑ 2:

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εσωτερικό του παίρνουμε σημείο K . Από το K φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα κάθετα προς τις πλευρές του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών καθέτων ευθύγραμμων τμημάτων είναι σταθερό, ανεξάρτητα από τη θέση του K .

Να απαντήσετε τα θέματα 3,4,5 και 6 **γράφοντας μόνο την τελική απάντηση**. Το κάθε θέμα είναι **5 μονάδες**.

ΘΕΜΑ 3:

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2018^2 - (1 \times 3 + 2 \times 4 + \dots + 2016 \times 2018 + 2017 \times 2019)$$

ΘΕΜΑ 4:

Ο μικρότερος θετικός ακέραιος v για τον οποίο ο αριθμός $v(v+1)(v+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5 είναι ο $v=3$. Γράφουμε κατά αύξουσα σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους v , για τους οποίους ο αριθμός $v(v+1)(v+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5. Ποιος είναι ο 2019^{ος} αριθμός;

ΘΕΜΑ 5:

Κατά τη φετινή σχολική χρονιά η Ισαβέλλα έχει γράψει 7 διαγωνίσματα μαθηματικών και έχει πάρει 7 διαφορετικούς βαθμούς. Οι βαθμοί που έχει πάρει είναι ακέραιοι από το 91 μέχρι και το 100. Η Ισαβέλλα έχει παρατηρήσει ότι ο μέσος όρος των βαθμών της μετά από κάθε διαγώνισμα είναι ακέραιος αριθμός. Αν στο 7^ο διαγώνισμα έχει γράψει 95, πόσα έχει γράψει στο 6^ο διαγώνισμα;

ΘΕΜΑ 6:

Στο ευθύγραμμο τμήμα AD παίρνουμε σημεία B και Γ έτσι ώστε $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta=2\text{cm}$. Με διάμετρο AB , $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ κατασκευάζονται τρία ημικύκλια που εφάπτονται στην ευθεία EZ στα σημεία E , K και Z αντίστοιχα. Με κέντρο K και ακτίνα 2cm γράφουμε κύκλο. Το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας, όπως φαίνεται στο σχήμα, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{\alpha}{\beta}\pi - \sqrt{\gamma} + \delta,$$

όπου α , β , γ και δ είναι θετικοί ακέραιοι και α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους. Να βρείτε το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

