ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ IMC STAGE III

ΑΠΡΙΛΗΣ 2019

Χρόνος Εξέτασης: **2ώρες**

Ημερομηνία: ***17/04/2019*** *Ώρα εξέτασης:* ***15:45 -17:45***

Να απαντήσετε τα θέματα 1 και 2 **αιτιολογώντας πλήρως** τις απαντήσεις σας. Το κάθε θέμα είναι **10 μονάδες.**

ΘΕΜΑ 1:

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή των n και m, με $n, m > 1$ και $n \neq m$, ώστε όλοι οι ρητοί αριθμοί $\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n+1}, \frac{m+2}{n+2}, \frac{m+3}{n+3}, \frac{m+4}{n+4}, \frac{m+5}{n+5}$ να είναι ακέραιοι.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Έστω $m > n$ και $m = n + \kappa$, όπου κ ακαίρεος αριθμός. Τότε τα κλάσματα μπορούν να γραφτούν

$$\frac{n+\kappa}{n}, \frac{n+\kappa+1}{n+1}, \frac{n+\kappa+2}{n+2}, \frac{n+\kappa+3}{n+3}, \frac{n+\kappa+4}{n+4}, \frac{n+\kappa+5}{n+5}$$

ή $$\frac{n+\kappa}{n}, \frac{(n+1)+\kappa}{n+1}, \frac{(n+2)+\kappa}{n+2}, \frac{(n+3)+\kappa}{n+3}, \frac{(n+4)+\kappa}{n+4}, \frac{(n+5)+\kappa}{n+5}$$

Για να είναι τα κλάσματα ακαίρεοι πρέπει το κ να είναι πολλαπλάσιο των

$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ και αφού θέλουμε τη μικρότερη τιμή των m και n τότε

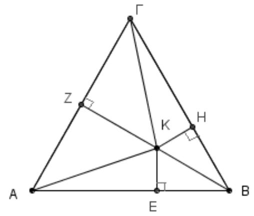
αν $n = 2$ τότε το κ θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $2, 3, 4, 5, 6, 7$ δηλαδή $\kappa = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Άρα ελάχιστη τιμή των $n = 2$ και $m = 2 + 420 = 422$.

Απάντηση: $n = 2$, $m = 422$

ΘΕΜΑ 2:

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εσωτερικό του παίρνουμε σημείο Κ . Από το Κ φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα κάθετα προς τις πλευρές του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών καθέτων ευθύγραμμων τμημάτων είναι σταθερό, ανεξάρτητα από τη θέση του Κ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ



Έστω ισόπλευρο τρίγωνο με ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ=α και ύψος τριγώνου = υ

Το $E_{AB\Gamma} = E_{KAB} + E_{KB\Gamma} + E_{KA\Gamma}$ τότε

$$\frac{(AB)\cdot \upsilon}{2} = \frac{(AB)\cdot(KE)}{2} + \frac{(B\Gamma)\cdot(KH)}{2} + \frac{(A\Gamma)(KZ)}{2}$$

$$\alpha \cdot \upsilon = \alpha \cdot (KE) + \alpha \cdot (KH) + \alpha(KZ)$$

$$\alpha \cdot \upsilon = \alpha \cdot \left[(KE) + (KH) + (KZ)\right] \text{ τότε } (KE) + (KH) + (KZ) = \upsilon$$

Άρα το άθροισμα των τριών καθέτων ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσο με το ύψος του ισόπλευρου τριγώνου ανεξάρτητα από τη θέση του Κ.

Να απαντήσετε τα θέματα 3,4,5 και 6 **γράφοντας μόνο την τελική απάντηση**. Το κάθε θέμα είναι **5 μονάδες.**

ΘΕΜΑ 3:

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2018^2 - (1\times 3 + 2\times 4 + \ldots + 2016\times 2018 + 2017\times 2019)$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι $1\times 3 = 2^2 - 1^2$, $2\times 4 = 3^2 - 1^2$, … , $2017\times 2019 = 2018^2 - 1^2$.

Τότε $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2018^2 - (2^2 - 1^2 + 3^2 - 1^2 + \ldots + 2018^2 - 1^2)$

$$A = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = 2018$$

Απάντηση: $A = 2018$

ΘΕΜΑ 4:

Ο μικρότερος θετικός ακέραιος ν για τον οποίο ο αριθμός $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5 είναι ο $\nu = 3$. Γράφουμε κατά αύξουσα σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους ν, για τους οποίους ο αριθμός $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5. Ποιος είναι ο $2019^{ος}$ αριθμός ;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι αφού το 5 είναι πρώτος αριθμός, τότε για να είναι το γινόμενο $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ πολλαπλάσιο του 5 πρέπει τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $\nu,\ \nu+1,\ \nu+2$ να είναι πολλαπλάσιο του 5.

- Αν ο ν είναι πολλαπλάσιο του 5 τότε ο αριθμός $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

- Αν ο ν είναι 1 λιγότερο από πολλαπλάσιο του 5 τότε ο αριθμός $\nu+1$ είναι πολλαπλάσιο του 5 και κατά συνέπεια ο αριθμός $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

- Αν ο ν είναι 2 λιγότερο από πολλαπλάσιο του 5 τότε ο αριθμός $\nu+2$ είναι πολλαπλάσιο του 5 και κατά συνέπεια ο αριθμός $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

- Αν ο ν είναι 3 ή 4 λιγότερο από πολλαπλάσιο του 5 τότε ο αριθμός $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ δεν είναι πολλαπλάσιο του 5.

Διαπιστώνουμε ότι αν ο αριθμός ν τελειώνει σε 3, 4, 5, 8, 9 ή 0 τότε ο αριθμός $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε 10 τιμές του ν έχουμε 6 για τις οποίες ο αριθμός $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

Αφού $2019 = 336\times 6+3$ έχουμε ότι στους πρώτους $336\times 10 = 3360$ θετικούς ακέραιους αριθμούς έχουμε $336\times 6 = 2016$ για τους οποίους ο αριθμός $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5. Οι αριθμοί 3361 και 3362 δε θα μας δώσουν πολλαπλάσιο του 5 αφού τελειώνουν σε 1 και 2 αντίστοιχα. Οι επόμενοι τρεις αφού τελειώνουν σε 3, 4 και 5 θα μας δώσουν πολλαπλάσιο του 5.

Καταλήγουμε ότι ο $2019^{ος}$ αριθμός στη λίστα για τον οποίο ο αριθμός $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5 είναι ο 3365.

Απάντηση: $\nu = 3365$

ΘΕΜΑ 5:

Κατά τη φετινή σχολική χρονιά η Ισαβέλλα έχει γράψει 7 διαγωνίσματα μαθηματικών και έχει πάρει 7 διαφορετικούς βαθμούς. Οι βαθμοί που έχει πάρει είναι ακέραιοι από το 91 μέχρι και το 100. Η Ισαβέλλα έχει παρατηρήσει ότι ο μέσος όρος των βαθμών της μετά από κάθε διαγώνισμα είναι ακέραιος αριθμός. Αν στο $7^{ο}$ διαγώνισμα έχει γράψει 95, πόσα έχει γράψει στο $6^{ο}$ διαγώνισμα;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα των βαθμών της Ισαβέλλας στα 7 διαγωνίσματα είναι

$$100+99+98+97+96+95+94=7\times 97$$

και το μικρότερο

$$91+92+94+94+95+96+97=7\times 94$$

Άρα αφού μετά από 7 διαγωνίσματα ο μέσος όρος των βαθμών της είναι ακέραιος το άθροισμα των βαθμών της μετά από 7 διαγωνίσματα μπορεί να είναι

$$7\times 94, 7\times 95, 7\times 96 \text{ ή } 7\times 97$$

Αφαιρώντας από τους πιο πάνω αριθμούς 95 παίρνουμε 584, 577, 570 και 563. Ο ζητούμενος αριθμός πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 6. Αυτός είναι ο 570. Ο βαθμός που πήρε στο $6^{ο}$ διαγώνισμα είναι ένας αριθμός από το 91 μέχρι το 100 (αλλά όχι το 95) που αν τον αφαιρέσουμε από το 570 θα μας δώσει αριθμό πολλαπλάσιο του 5. Ο αριθμός αυτός είναι το 100.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κατά σειρά οι αριθμοί 91, 93, 92, 96, 98, 100 και 95 ικανοποιούν τις υποθέσεις του προβλήματος.

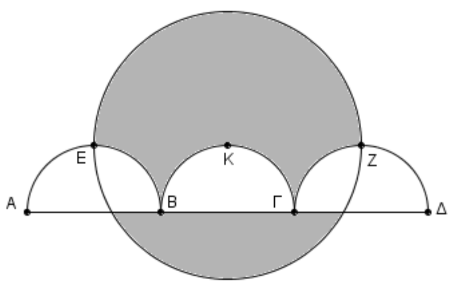
Απάντηση: 100

ΘΕΜΑ 6:

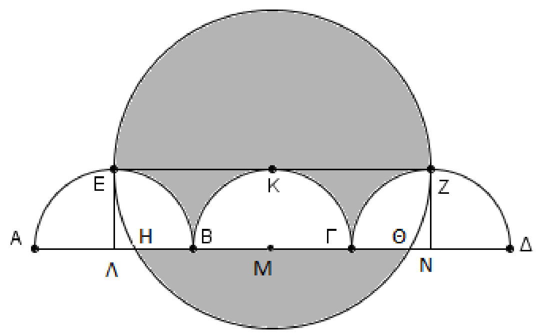
Στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παίρνουμε σημεία Β και Γ έτσι ώστε ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=2cm. Με διάμετρο ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ κατασκευάζονται τρία ημικύκλια που εφάπτονται στην ευθεία ΕΖ στα σημεία Ε, Κ και Ζ αντίστοιχα. Με κέντρο Κ και ακτίνα 2cm γράφουμε κύκλο. Το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας, όπως φαίνεται στο σχήμα, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{\alpha}{\beta}\pi-\sqrt{\gamma}+\delta,$$

όπου α, β, γ και δ είναι θετικοί ακέραιοι και α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους. Να βρείτε το άθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$.



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ



Έστω ακτίνα μεγάλου κύκλου $R = 2$ και ακτίνα ημικυκλίων $r = 1$

Το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας μπορούμε να το χωρίσουμε σε τρεις περιοχές

E_1 το εμβαδόν πάνω από τη διάμετρο ΕΖ του μεγάλου κύκλου, E_2 το εμβαδόν μεταξύ της ΕΖ και ΛΝ και E_3 το εμβαδόν κάτω από την ΛΝ.

$$E_1 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = \frac{4\pi}{2} \text{ τότε } E_1 = 2\pi$$

$$E_2 = E_{ΕΖΝΛ} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4 \cdot 1 - \pi = 4 - \pi \text{ τότε } E_2 = 4 - \pi$$

Τα εμβαδόν E_3 ισούται με το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος τόξου 120^o.

Στο ορθογωνίο τρίγωνο ΚΜΗ η κάθετη πλευρά $ΚΜ = r = 1$ και η υποτείνουσα του $ΚΗ = R = 2$. Αφού η κάθετη πλευρά είναι το μισό της υποτείνουσας τότε η γωνία $ΚΗΜ = 30^o$ και η γωνία $ΗΚΘ = 120^o$.

$$E_3 = E_{κ.τομέα} - E_{ΚΗΘ} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120^o}{360} - \frac{2^2 \cdot ημ120^o}{2} = \frac{4\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{2 \cdot 2} \text{ τότε } E_3 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Τότε $E_{σκιασμένο} = E_1 + E_2 + E_3 = 2\pi + 4 - \pi + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3} + 4$

$$E = \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3} + 4 \quad \text{τότε} \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 7 + 3 + 3 + 4 = 17$$

Απάντηση: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 17$