ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Επαρχιακός Διαγωνισμός

Οκτώβριος 2018

Α΄ Λυκείου

Ημερομηνία: 27/10/2018 Ώρα Εξέτασης: 10:00 - 12:00

Οδηγίες

1. Να λύσετε όλα τα προβλήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1.

Αν $x+y=\sqrt{6+\sqrt{20}}$ και $x-y=\sqrt{5}-1$. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A=x^2+y^2 \qquad \textit{και} \qquad B=\sqrt[3]{\frac{x^7+y^7+x^6y+xy^6-x-y}{x+y}}$$

ΛΥΣΗ

$$x+y=\sqrt{6+\sqrt{20}} \Rightarrow (x+y)^2=\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=6+2\sqrt{5} \quad (1)$$

$$x-y=\sqrt{5}-1 \Rightarrow (x-y)^2=(\sqrt{5}-1)^2 \Rightarrow x^2+y^2-2xy=6-\sqrt{5} \quad (2)$$

$$(1)+(2):\ 2(x^2+y^2)=12 \qquad \Rightarrow x^2+y^2=6$$

΄Αρα έχουμε ότι: $A=x^2+y^2=6$

$$(1)-(2): \qquad 4xy=4\sqrt{5} \Rightarrow xy=\sqrt{5} \qquad (3)$$

$$B=\sqrt[3]{\frac{x^7+y^7+x^6y+xy^6-x-y}{x+y}}=\sqrt[3]{\frac{x^6(x+y)+y^6(x+y)-(x+y)}{x+y}}=\sqrt[3]{x^6+y^6-1}$$

$$=\sqrt[3]{(x^2+y^2)^3-3x^4y^2-3x^2y^4-1}=\sqrt[3]{(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)-1}$$

$$=\sqrt[3]{6^3-3(\sqrt{5})^2\cdot 6-1}=\sqrt[3]{216-90-1}=\sqrt[3]{125}=5$$

Πρόβλημα 2.
(α) Να βρείτε όλες τις λύσεις, στο $\mathbb{R}$, του συστήματος:

$$|\alpha| - \frac{2\beta}{|\beta|} = -1$$

$$\alpha|\alpha| + \beta|\beta| = 24$$

(β) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η τομή των γραφημάτων που περιγράφονται από τις σχέσεις

$$y \geq \left|\frac{x}{2}\right| \ \ \kappa\alpha\iota \ \ y \leq \kappa|x| + 17$$

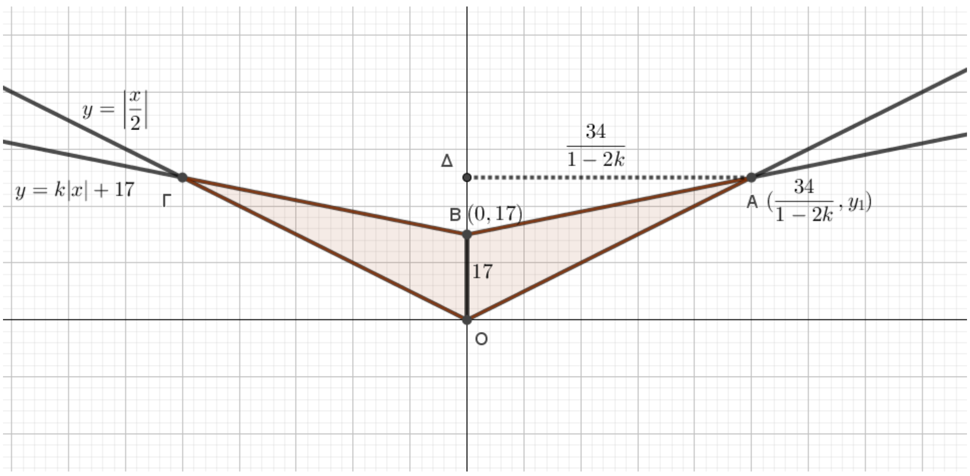
σχηματίζουν χωρίο με εμβαδόν 51 τετραγωνικές μονάδες.

ΛΥΣΗ
(α) Η πρώτη σχέση γράφεται $|\alpha| + 1 = \frac{2\beta}{|\beta|}$
Επειδή $|\alpha| + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2\beta}{|\beta|} > 0 \Rightarrow \beta > 0 \Rightarrow |\beta| = \beta$
Άρα $|\alpha| - \frac{2\beta}{|\beta|} = -1 \Rightarrow |\alpha| = 2 \Rightarrow |\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = -1$

- $\alpha = 1 \Rightarrow 1 + \beta^2 = 24 \Rightarrow \beta^2 = 23 \Rightarrow \beta = \sqrt{23}, \quad (\beta > 0)$
- $\alpha = -1 \Rightarrow -1 + \beta^2 = 24 \Rightarrow \beta^2 = 25 \Rightarrow \beta = 5 \quad (\beta > 0)$

Λύσεις: $\alpha = 1$ και $\beta = \sqrt{23}$ ή $\alpha = -1$ και $\beta = 5$

(β) Κατασκευάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των $y \geq \left|\frac{x}{2}\right|$ και $y \leq \kappa|x| + 17$



Θα βρούμε τα σημεία τομής των 2 γραφικών παραστάσεων.
Αν $x > 0 : y = \frac{x}{2}$ και $y = \kappa x + 17 \Rightarrow \frac{x}{2} = \kappa x + 17 \Rightarrow x = 2\kappa x + 34 \Rightarrow x = \frac{34}{1-2\kappa}, \ \kappa \neq \frac{1}{2}$

Το ζητούμενο Εμβαδόν θα είναι διπλάσιο από το Εμβαδόν του τριγώνου ABO.

Άρα $E = 2 \cdot \frac{17 \cdot \frac{34}{1-2\kappa}}{2} = 51 \Rightarrow \kappa = -\frac{31}{6}$

Πρόβλημα 3.
Δίνονται πέντε διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί $a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ έτσι ώστε το άθροισμα τους να είναι τετράγωνο κάποιου ακεραίου αριθμού και το άθροισμα $\beta+\gamma+\delta$ να είναι κύβος κάποιου ακεραίου αριθμού. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του αριθμού a.

ΛΥΣΗ Θέτουμε τους πέντε διαδοχικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς $a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ως εξής:

$$a = x-2, \qquad \beta = x-1, \qquad \gamma = x, \qquad \delta = x+1, \qquad \delta = x+2$$

Άρα σύμφωνα με τις συνθήκες υπάρχουν φυσικοί αριθμοί κ και λ έτσι ώστε:

$$a+\beta+\gamma+\delta+\epsilon = \kappa^2 \Rightarrow (x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2) = \kappa^2 \Rightarrow 5x = \kappa^2 \Rightarrow x = \frac{\kappa^2}{5} \Rightarrow \kappa = \sqrt{5x} \quad \kappa \in \mathbb{N}$$

$$\beta+\gamma+\delta = \lambda^3 \Rightarrow (x-1)+x+(x+1) = \lambda^2 \Rightarrow 3x = \lambda^3 \Rightarrow x = \frac{\lambda^3}{3} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{3x}, \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

Για να είναι οι κ και λ φυσικοί αριθμοί πρέπει το $x \in \mathbb{N}$ να έχει ως παράγοντες δυνάμεις των πρώτων αριθμών 3 και 5.
Άρα έχουμε, ότι $x = 3^2 \cdot 5^3 \Rightarrow \kappa = 75$ και $\lambda = 15 \Rightarrow$

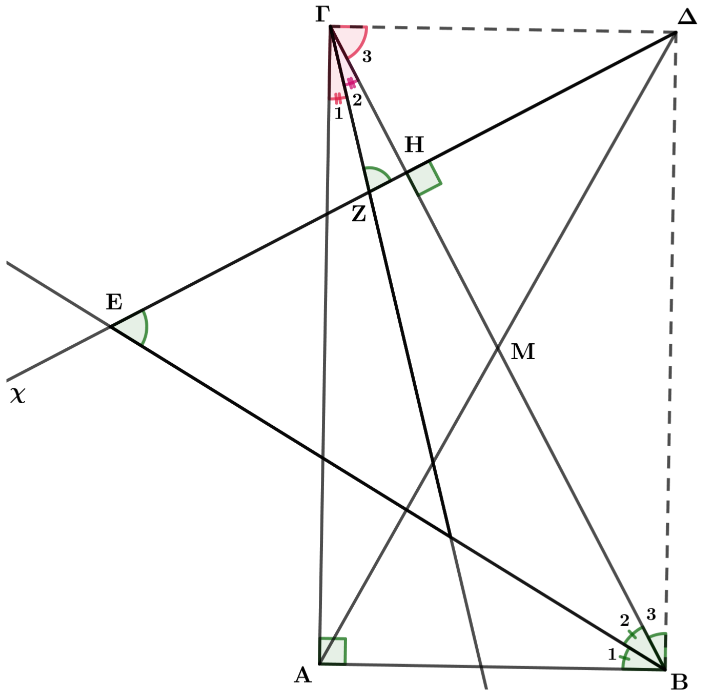
$$a = 1123, \qquad \beta = 1124, \qquad \gamma = 1125, \qquad \delta = 1126, \qquad \epsilon = 1127$$

Δηλαδή η ζητούμενη τιμή του a είναι 1123.

Πρόβλημα 4.
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^o$) και η διάμεσος του AM την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Από το Δ φέρουμε την $\Delta x \perp B\Gamma$ που τέμνει τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
(α) $\Delta E = A\Gamma$
(β) $(\Delta E)^2 + (\Delta Z)^2 = (B\Gamma)^2$

ΛΥΣΗ
(α)
Ισχύουν,
$AM = \frac{B\Gamma}{2}$ (διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου),
$AM = M\Delta$ (δεδομένο),
$BM = M\Gamma$ (Μ μέσο του $B\Gamma$).
Παρατηρούμε ότι οι διαγώνιοι $A\Delta$ και $B\Gamma$ του τετραπλεύρου $AB\Delta\Gamma$ είναι ίσοι και διχοτομούνται, άρα το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο και έχουμε ότι:
$B\Delta = A\Gamma \qquad (1) \qquad$ και $\qquad \Gamma\Delta = AB \qquad (2)$ και
$\angle A = \angle AB\Delta = \angle B\Delta\Gamma = \angle \Delta\Gamma A = 90° \qquad (3)$

BE διχοτόμος της γωνίας του τριγώνου $AB\Gamma$ άρα $B_1 = B_2 = x \Rightarrow \angle EB\Delta = \angle 90° - x \qquad (4)$
Στο ορθογώνιο τρίγωνο EHB έχουμε ότι: $\angle E = 90° - \angle EBH = 90° - x \qquad (5)$



Από τις σχέσεις (4) και (5) το τρίγωνο $E\Delta B$ είναι ισοσκελές, άρα $\Delta E = \Delta B$ (6)

Από τις (1) και (6) συμπεραίνουμε ότι: $\Delta E = A\Gamma$, ό.έ.δ.

(β) Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι: $\Gamma Z = AB$, δηλαδή,

ΓZ διχοτόμος της γωνίας του τριγώνου $A\Gamma B$ άρα $\Gamma_1 = \Gamma_2 = y \Rightarrow \angle Z\Gamma\Delta = \angle 90° - y$ (7)
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZH\Gamma$ έχουμε ότι: $\angle Z = 90° - \angle\Gamma_2 = 90° - y$ (8)

Από τις σχέσεις (7) και (8) το τρίγωνο $\Gamma\Delta Z$ είναι ισοσκελές, άρα $\Delta Z = \Delta\Gamma$ (9)

Από τις (2) και (9) συμπεραίνουμε ότι: $\Delta Z = AB$, ό.έ.δ.

Άρα, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε ότι,

$$(\Delta E)^2 + (\Delta Z)^2 = (A\Gamma)^2 + (AB)^2 = (B\Gamma)^2$$