# ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Επαρχιακός Διαγωνισμός

Οκτώβριος 2018

Β΄ Λυκείου

Ημερομηνία: 27/10/2018 Ώρα Εξέτασης: 10:00 - 12:00

**Οδηγίες**

1. Να λύσετε όλα τα προβλήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

---

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**Πρόβλημα 1.**

(α) Να βρείτε όλες τις λύσεις, στο $\mathbb{R}$, του συστήματος:

$$|\alpha| - \frac{2\beta}{|\beta|} = -1$$

$$\alpha|\alpha| + \beta|\beta| = 24$$

(β) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa$ για τις οποίες η τομή των γραφημάτων που περιγράφονται από τις σχέσεις

$$y \geq \left|\frac{x}{2}\right| \ \ \kappa\alpha\iota \ \ y \leq \kappa|x| + 17$$

σχηματίζουν χωρίο με εμβαδόν 51 τετραγωνικές μονάδες.

**ΛΥΣΗ**

(α) Η πρώτη σχέση γράφεται $|\alpha| + 1 = \frac{2\beta}{|\beta|}$

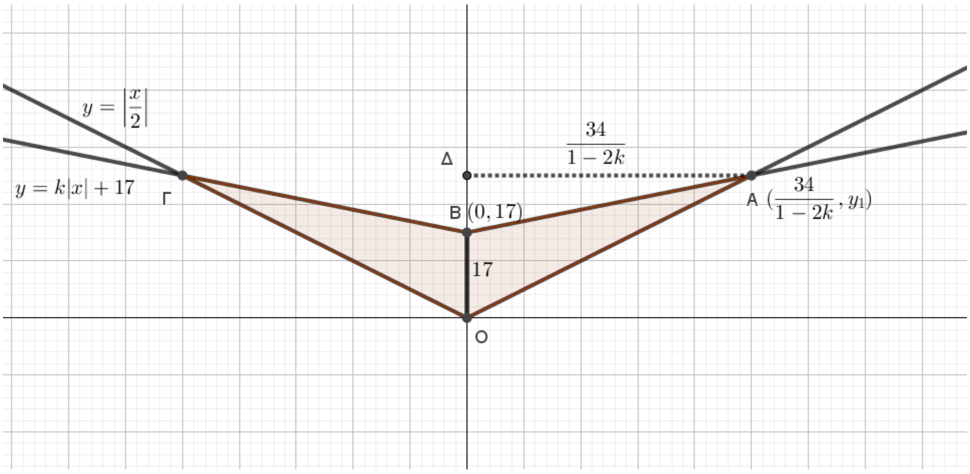
Επειδή $|\alpha| + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2\beta}{|\beta|} > 0 \Rightarrow \beta > 0 \Rightarrow |\beta| = \beta$

Άρα $|\alpha| - \frac{2\beta}{|\beta|} = -1 \Rightarrow |\alpha| = 2 \Rightarrow |\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = -1$

- $\alpha = 1 \Rightarrow 1 + \beta^2 = 24 \Rightarrow \beta^2 = 23 \Rightarrow \beta = \sqrt{23}, \quad (\beta > 0)$
- $\alpha = -1 \Rightarrow -1 + \beta^2 = 24 \Rightarrow \beta^2 = 25 \Rightarrow \beta = 5 \quad (\beta > 0)$

Λύσεις: $\alpha = 1$ και $\beta = \sqrt{23}$ ή $\alpha = -1$ και $\beta = 5$

(β) Κατασκευάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των $y \geq \left|\frac{x}{2}\right|$ και $y \leq \kappa|x| + 17$




Θα βρούμε τα σημεία τομής των 2 γραφικών παραστάσεων.
Αν $x > 0 : y = \frac{x}{2}$ και $y = \kappa x + 17 \Rightarrow \frac{x}{2} = \kappa x + 17 \Rightarrow x = 2\kappa x + 34 \Rightarrow x = \frac{34}{1-2\kappa}$, $\kappa \neq \frac{1}{2}$

Το ζητούμενο Εμβαδόν θα είναι διπλάσιο από το Εμβαδόν του τριγώνου $AB O$.

Άρα $E = 2 \cdot \frac{17 \cdot \frac{34}{1-2\kappa}}{2} = 51 \Rightarrow \kappa = -\frac{31}{6}$

**Πρόβλημα 2.**
α) Να βρείτε τις τιμές των αριθμών $\kappa$ και $\lambda$ για τους οποίους ισχύει η ισότητα,

$$\epsilon\varphi x = \frac{\kappa}{\epsilon\varphi x} + \frac{\lambda}{\epsilon\varphi 2x}, \qquad \{x \in \mathbb{R}/\epsilon\varphi x, \epsilon\varphi 2x \neq 0\}$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα,

$$S_\nu = \epsilon\varphi x + 2\epsilon\varphi 2x + 4\epsilon\varphi 4x + \cdots + 2^\nu \epsilon\varphi\left(2^\nu x\right)$$

**ΛΥΣΗ**
α) Εφόσον ισχύει η σχέση $\epsilon\varphi x = \frac{\kappa}{\epsilon\varphi x} + \frac{\lambda}{\epsilon\varphi 2x}$ αντικαθιστώντας δύο ειδικές τιμές του $x$ για να δημιουργηθεί ένα σύστημα με αγνώστους τα κ και λ.
Για $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\kappa}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \Rightarrow 9\kappa + 3\lambda = 3 \Rightarrow 3\kappa + \lambda = 1$

Για $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} - \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \Rightarrow \kappa - \lambda = 3$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $\kappa = 1 \wedge \lambda = -2$
Επαλήθευση: $\frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{2}{\epsilon\varphi 2x} = \frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{2}{\frac{2\epsilon\varphi x}{1-\epsilon\varphi^2 x}} = \frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{1-\epsilon\varphi^2 x}{\epsilon\varphi x} = \frac{1-1+\epsilon\varphi^2 x}{\epsilon\varphi x} = \epsilon\varphi x$

β) Από το (α) προκύπτει ότι: $\epsilon\varphi x = \frac{\kappa}{\epsilon\varphi x} + \frac{\lambda}{\epsilon\varphi 2x}$

$$\begin{array}{lcl}
\epsilon\varphi x & = & \frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{2}{\epsilon\varphi 2x} \\
2\epsilon\varphi 2x & = & \frac{2}{\epsilon\varphi 2x} - \frac{4}{\epsilon\varphi 4x} \\
4\epsilon\varphi 4x & = & \frac{4}{\epsilon\varphi 4x} - \frac{8}{\epsilon\varphi 8x} \\
 & & \\
2^\nu \epsilon\varphi 2^\nu x & = & \frac{2^\nu}{\epsilon\varphi(2^\nu x)} - \frac{2 \cdot 2^{\nu+1}}{\epsilon\varphi(2 \cdot 2^\nu x)}
\end{array}$$

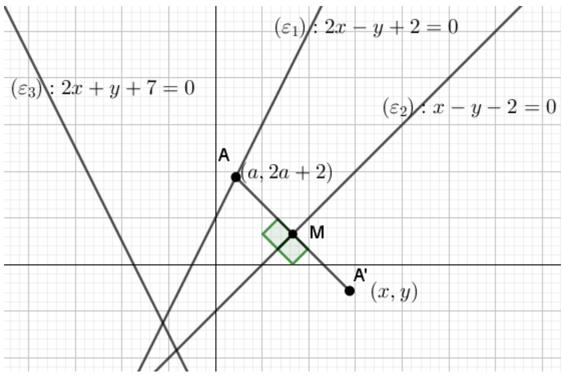
Προσθέτοντας κατά μέλη τις πιο πάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$S_\nu = \epsilon\varphi x + 2\epsilon\varphi 2x + 4\epsilon\varphi 4x + \cdots + 2^\nu \epsilon\varphi\left(2^\nu x\right) = \frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{2^{\nu+1}}{\epsilon\varphi(2^{\nu+1}x)}$$

$$\Longrightarrow S_\nu = \frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{2^{\nu+1}}{\epsilon\varphi(2^{\nu+1}x)}$$

**Πρόβλημα 3.**
Δίνονται οι ευθείες: $(\epsilon_1):\ 2x - y + 2 = 0,\quad (\epsilon_2):\ x - y - 2 = 0$ και $(\epsilon_3): 2x + y + 7 = 0$.
Να βρείτε σημείο $A$ της ευθείας $(\epsilon_1)$ ώστε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία $(\epsilon_2)$ να ανήκει στην $(\epsilon_3)$.

**ΛΥΣΗ**




Έστω σημείο $A(a, 2a+2)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας $(\epsilon_1)$ σημείο $A'(x, y)$ το συμμετρικό του ως προς την ευθεία $(\epsilon_2)$.
Το μέσον $M$ του $AA'$ θα ανήκει στην ευθεία $(\epsilon_2) \Rightarrow M\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+2a+2}{2}\right) \in (\epsilon_2)$.
Άρα,

$$\frac{x+a}{2} - \frac{y+2a+2}{2} - 2 = 0 \Rightarrow x + a - y - 2a - 2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x - y = a + 6 \qquad (1)$$

Η κλίση της ευθείας $AA$" θα ισούται με $-1$ αφού $AA' \perp (\epsilon_2)$. Άρα,

$$\frac{y - 2a - 2}{x - a} = -1 \Rightarrow y - 2a - 2 = -x + a \Rightarrow$$

$$x + y = 3a + 2 \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει ότι $x = 2a + 4$ και $y = a - 2$.
Τώρα οι συντεταγμένες του σημείου $A'(x, y) = A'(2a + 4, a - 2)$ θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $(\epsilon_3)$ αφού θέλουμε το σημείο $A'$ να ανήκει πάνω στην $(\epsilon_3)$. Άρα,

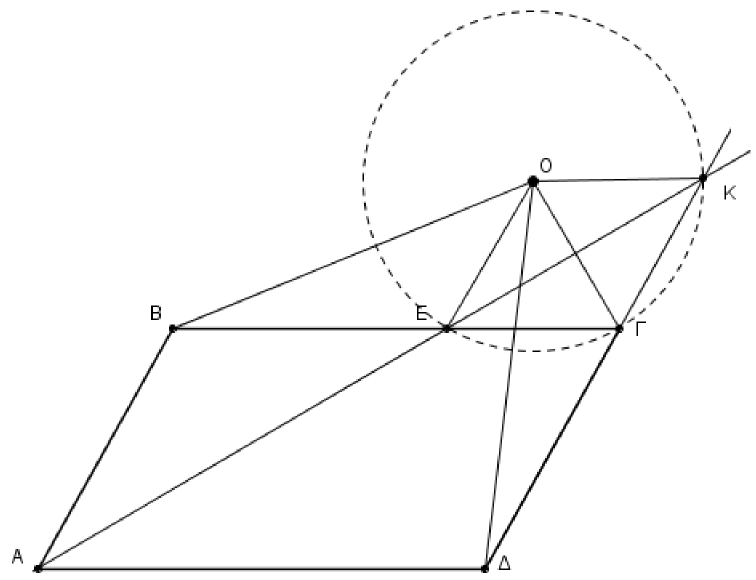
$$2(2a + 4) + a - 2 + 7 = 0 \Rightarrow 5a = -13 \Rightarrow a = -\frac{13}{5}$$

Τώρα αφού $a = \frac{13}{5} \Rightarrow x = -\frac{6}{5}$ και $y = -\frac{23}{5} \Rightarrow A'\left(-\frac{6}{5}, -\frac{23}{5}\right)$.

**Πρόβλημα 4.**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle ΒΑΔ$ τέμνει τις πλευρές $ΒΓ$ και $ΓΔ$ στα σημεία $Ε$ και $Κ$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το κέντρο του κύκλου που περνά από τα σημεία $Γ, Κ, Ε$ ανήκει στον κύκλο που περνά από τα σημεία $Β, Γ, Δ$.

**ΛΥΣΗ**




Για να αποδείξουμε ότι το Κέντρο $O$ του κύκλου που περνά από τα σημεία $Ε, Γ, Κ$ βρίσκεται στον κύκλο που περνά από τα σημεία $Β, Γ$ και $Δ$ αρκεί να δείξουμε ότι το τετράπλευρο $ΒΟΓΔ$ είναι εγγράφιμο τετράπλευρο.

$\angle ΒΑΕ = \angle ΕΑΔ$ (ΑΕ διχοτόμος της γωνίας $\angle ΒΑΔ$) και
$\angle ΕΑΔ = \angle ΒΑΕ$ (ως εντός εναλλάξ $ΒΓ \parallel ΑΔ$)
άρα $\angle ΒΑΕ = \angle ΒΕΔ$. Επομένως το τρίγωνο $ΑΒΕ$ είναι ισοσκελές και έτσι έχουμε ότι,

$$ΑΒ = ΒΕ \quad (1)$$

$\angle ΑΔΓ = \angle ΕΓΚ$ (ως εντός εκτός και επί τ'αυτά μέρη) και
$\angle ΑΕΒ = \angle ΓΕΚ$(ως κατακορυφήν γωνίες)
άρα $\angle ΓΕΚ = \angle ΓΚΕ$. Επομένως το τρίγωνο $ΕΓΚ$ είναι ισοσκελές και έτσι έχουμε ότι,

$$ΕΓ = ΓΚ \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι: $ΒΓ = ΔΚ$

Τα τρίγωνα $ΟΕΓ$ και $ΟΓΚ$ έχουν ίσες πλευρές άρα είναι ίσα (3)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΒΟΓ$ και $ΚΟΔ$.
(α) $ΒΓ = ΔΚ$
(β) $ΟΓ = ΟΚ$ (= ακτίνα κύκλου)
(γ) $\angle ΟΓΒ = \angle ΟΚΔ$ (3),
άρα έχουμε ότι $\triangle ΒΟΓ = \triangle ΚΟΔ \Rightarrow \angle ΟΒΓ = \angle ΟΒΔ$
Αφού ισχύει $\angle ΟΒΓ = \angle ΟΒΔ$ έχουμε ότι το τετράπλευρο $ΒΓΔΟ$ είναι εγγράφιμο.