ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Επαρχιακός Διαγωνισμός

Οκτώβριος 2018

Γ' Λυκείου

Ημερομηνία: 27/10/2018 Ώρα Εξέτασης: 10:00 - 12:00

Οδηγίες

1. Να λύσετε όλα τα προβλήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x} - x\ln x,\ x > 0$.

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

(β) Να δείξετε ότι $x - 1 \leq x^2 \ln x,\ x > 0$.

(γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x - 1 - x^2 \ln x = \lambda x$ για $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) $f'(x) = \frac{x-x+1}{x^2} - \ln x - 1 = \frac{1-x^2\ln x - x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \ln x - 1$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 \ln x - x^2 = 0.$$

Προφανής λύση $x = 1$.

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} = -\frac{2+x^2}{x^3} > 0, \quad \forall x > 0$$

Άρα το σημείο $(1, f(1)) = (1, 0)$ θα είναι τοπικό μέγιστο της $f(x)$.

Επιπρόσθετα αφού $f''(x) < 0 \Rightarrow$ η $f'(x)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα $\forall x > 0$. και άρα η $f'(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει άλλη λύση.

Άρα μοναδικό **Τοπικό Μέγιστο (1,0)**.

Συνεπώς η $f(x)$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ Παρατηρούμε επίσης πως το σημείο (1,0) θα είναι και ολικό μέγιστο.

β) Αφού το σημείο $(1, 0)$ είναι ολικό μέγιστο της

$$f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(1) \Rightarrow \frac{x-1}{x} - x\ln x \leq 0 \Rightarrow x - 1 - x^2 \ln x \leq 0 \Rightarrow x - 1 \leq x^2 \ln x$$

γ) Η εξίσωση $x - 1 - x^2 \ln x = \lambda x$ εύκολα εάν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με x,αφού $x > 0$ μετασχηματίζεται στην εξίσωση $\frac{x-1}{x} - x\ln x = \lambda$ δηλαδή $f(x) = \lambda$.

Αφού τώρα η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 1$ το 0 τότε:

Αν $\lambda > 0$ Καμία λύση, Αν $\lambda = 0$ Μία λύση, Αν $\lambda < 0$ Δύο λύσεις

Πρόβλημα 2.

α) Να βρείτε τις τιμές των αριθμών κ και λ για τους οποίους ισχύει η ισότητα,

$$\epsilon\varphi x = \frac{\kappa}{\epsilon\varphi x} + \frac{\lambda}{\epsilon\varphi 2x}, \qquad \{x \in \mathbb{R}/\epsilon\varphi x, \epsilon\varphi 2x \neq 0\}$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα,

$$S_\nu = \epsilon\varphi x + 2\epsilon\varphi 2x + 4\epsilon\varphi 4x + \cdots + 2^\nu \epsilon\varphi\left(2^\nu x\right)$$

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον ισχύει η σχέση $\epsilon\varphi x = \frac{\kappa}{\epsilon\varphi x} + \frac{\lambda}{\epsilon\varphi 2x}$ αντικαθιστώντας δύο ειδικές τιμές του x για να δημιουργηθεί ένα σύστημα με αγνώστους τα κ και λ.

Για $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\kappa}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \Rightarrow 9\kappa + 3\lambda = 3 \Rightarrow 3\kappa + \lambda = 1$

Για $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} - \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \Rightarrow \kappa - \lambda = 3$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $\kappa = 1 \wedge \lambda = -2$

Επαλήθευση: $\frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{2}{\epsilon\varphi 2x} = \frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{2}{\frac{2\epsilon\varphi x}{1-\epsilon\varphi^2 x}} = \frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{1-\epsilon\varphi^2 x}{\epsilon\varphi x} = \frac{1-1+\epsilon\varphi^2 x}{\epsilon\varphi x} = \epsilon\varphi x$

β) Από το (α) προκύπτει ότι: $\epsilon\varphi x = \frac{\kappa}{\epsilon\varphi x} + \frac{\lambda}{\epsilon\varphi 2x}$

$$\begin{aligned}
\epsilon\varphi x &= \frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{2}{\epsilon\varphi 2x} \\
2\epsilon\varphi 2x &= \frac{2}{\epsilon\varphi 2x} - \frac{4}{\epsilon\varphi 4x} \\
4\epsilon\varphi 4x &= \frac{4}{\epsilon\varphi 4x} - \frac{8}{\epsilon\varphi 8x} \\
\\
2^\nu \epsilon\varphi 2^\nu x &= \frac{2^\nu}{\epsilon\varphi(2^\nu x)} - \frac{2\cdot 2^{\nu+1}}{\epsilon\varphi(2\cdot 2^\nu x)}
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις πιο πάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$S_\nu = \epsilon\varphi x + 2\epsilon\varphi 2x + 4\epsilon\varphi 4x + \cdots + 2^\nu \epsilon\varphi\left(2^\nu x\right) = \frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{2^{\nu+1}}{\epsilon\varphi(2^{\nu+1}x)}$$

$$\Longrightarrow S_\nu = \frac{1}{\epsilon\varphi x} - \frac{2^{\nu+1}}{\epsilon\varphi(2^{\nu+1}x)}$$

Πρόβλημα 3.
Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(5)+f(6)=f(3)+f(8)$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (3,8)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

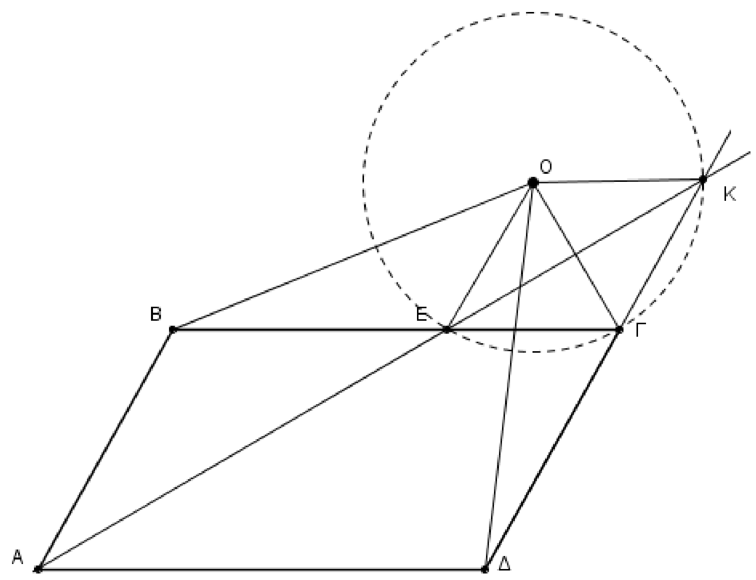
ΛΥΣΗ

$$f(5)+f(6)=f(3)+f(8) \Rightarrow f(5)-f(3)=f(8)-f(6) \qquad (1)$$

Αφού η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ προφανώς θα είναι παραγωγίσιμη και στα διαστήματα $(3,5)$ και $(6,8)$.
Για καθένα από τα διαστήματα $(3,5)$ και $(6,8)$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού λογισμού αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις:
$\exists \xi_1 \in (3,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(5)-f(3)}{2}$ και
$\exists \xi_2 \in (6,8)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(8)-f(6)}{2}$
Από την σχέση (1) προκύπτει $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.
Η $f(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη άρα η $f'(x)$ θα είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_1,ξ_2).
Αφού έχουμε ότι $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle
$\Rightarrow \exists \xi \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$

Πρόβλημα 4.
Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle ΒΑΔ$ τέμνει τις πλευρές $ΒΓ$ και $ΓΔ$ στα σημεία $Ε$ και $Κ$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το κέντρο του κύκλου που περνά από τα σημεία $Γ, Κ, Ε$ ανήκει στον κύκλο που περνά από τα σημεία $Β, Γ, Δ$.

ΛΥΣΗ



Για να αποδείξουμε ότι το Κέντρο $Ο$ του κύκλου που περνά από τα σημεία $Ε, Γ, Κ$ βρίσκεται στον κύκλο που περνά από τα σημεία $Β, Γ$ και $Δ$ αρκεί να δείξουμε ότι το τετράπλευρο $ΒΟΓΔ$

είναι εγγράψιμο τετράπλευρο.

$\angle BAE = \angle EA\Delta$ (ΑΕ διχοτόμος της γωνίας $\angle BA\Delta$) και
$\angle EA\Delta = \angle BAE$ (ως εντός εναλλάξ $B\Gamma \parallel A\Delta$)
άρα $\angle BAE = \angle BE\Delta$. Επομένως το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές και έτσι έχουμε ότι,

$$AB = BE \quad (1)$$

$\angle A\Delta\Gamma = \angle E\Gamma K$ (ως εντός εκτός και επί τ΄αυτά μέρη) και
$\angle AEB = \angle \Gamma EK$(ως κατακορυφήν γωνίες)
άρα $\angle \Gamma EK = \angle \Gamma KE$. Επομένως το τρίγωνο $E\Gamma K$ είναι ισοσκελές και έτσι έχουμε ότι,

$$E\Gamma = \Gamma K \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι: $B\Gamma = \Delta K$

Τα τρίγωνα $OE\Gamma$ και $O\Gamma K$ έχουν ίσες πλευρές άρα είναι ίσα (3)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $BO\Gamma$ και $KO\Delta$.
(α) $B\Gamma = \Delta K$
(β) $O\Gamma = OK$ (= ακτίνα κύκλου)
(γ) $\angle O\Gamma B = \angle OK\Delta$ (3),
άρα έχουμε ότι $\triangle BO\Gamma = \triangle KO\Delta \Rightarrow \angle OB\Gamma = \angle OB\Delta$
Αφού ισχύει $\angle OB\Gamma = \angle OB\Delta$ έχουμε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta O$ είναι εγγράψιμο.