



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Επαρχιακός Διαγωνισμός

Οκτώβριος 2018

Γ' Λυκείου

Ημερομηνία: 27/10/2018

Ώρα Εξέτασης: 10:00 - 12:00

Οδηγίες

1. Να λύσετε όλα τα προβλήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x} - x \ln x$, $x > 0$.

- (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.
- (β) Να δείξετε ότι $x - 1 \leq x^2 \ln x$, $x > 0$.
- (γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x - 1 - x^2 \ln x = \lambda x$ για $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2.

α) Να βρείτε τις τιμές των αριθμών κ και λ για τους οποίους ισχύει η ισότητα,

$$\epsilon\varphi x = \frac{\kappa}{\epsilon\varphi x} + \frac{\lambda}{\epsilon\varphi 2x}, \quad \{x \in \mathbb{R} / \epsilon\varphi x, \epsilon\varphi 2x \neq 0\}$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα,

$$S_n = \epsilon\varphi x + 2\epsilon\varphi 2x + 4\epsilon\varphi 4x + \dots + 2^n \epsilon\varphi (2^n x)$$

Πρόβλημα 3.

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει:

$$f(5) + f(6) = f(3) + f(8)$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (3, 8)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Πρόβλημα 4.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle B\Delta$ τέμνει τις πλευρές $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και K αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το κέντρο του κύκλου που περνά από τα σημεία Γ, K, E ανήκει στον κύκλο που περνά από τα σημεία B, Γ, Δ .