ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/12/2017 *Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30*

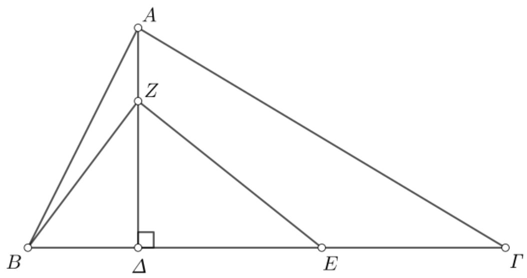
ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Το $ΑΔ$ είναι ύψος του τριγώνου $ΑΒΓ$, το $Ε$ είναι το μέσο του $ΔΓ$ και το $Ζ$ είναι σημείο του $ΑΔ$, ώστε το μήκος του $ΔΖ$ να είναι διπλάσιο από το μήκος του $ΑΖ$. Αν το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΖ$ είναι $5\ \mathrm{cm}^2$ και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ΑΓΕΖ$ είναι $30\ \mathrm{cm}^2$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΕΖ$.



Προτεινόμενη Λύση

Το τρίγωνο $ΒΖΔ$ έχει ίδιο ύψος και διπλάσια βάση από το τρίγωνο $ΒΖΑ$ Άρα:

$$E_{ΒΖΔ} = 2E_{ΒΖΑ} = 2 \cdot 5 = 10\ \mathrm{cm}^2$$

Από τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε ότι:

$$(ΔΖ) = \frac{2}{3}(ΑΔ),\ \ (ΔΕ) = \frac{1}{2}(ΔΓ)$$

Θα υπολογίσουμε τι μέρος του τριγώνου $ΑΓΔ$ είναι το τρίγωνο $ΔΖΕ$ και το τετράπλευρο $ΑΓΕΖ$. Έχουμε:

$$E_{ΔΕΖ} = \frac{1}{2}(ΔΖ)(ΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(ΑΔ) \cdot \frac{1}{2}(ΔΓ) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(ΑΔ)(ΔΓ) = \frac{1}{3}E_{ΑΔΓ} \qquad (1)$$

$$E_{ΑΓΕΖ} = E_{ΑΔΓ} - E_{ΔΕΖ} = E_{ΑΔΓ} - \frac{1}{3}E_{ΑΔΓ} = \frac{2}{3}E_{ΑΔΓ}$$

Άρα:

$$E_{ΑΔΓ} = \frac{3}{2}E_{ΑΓΕΖ} = \frac{3}{2} \cdot 30 = 45\ \mathrm{cm}^2 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2), παίρνουμε:

$$E_{ΔΕΖ} = \frac{1}{3}E_{ΑΔΓ} = \frac{1}{3} \cdot 45 = 15\ \mathrm{cm}^2,\ \ E_{ΒΕΖ} = 10 + 15 = 25\ \mathrm{cm}^2$$

Πρόβλημα 2

Τρεις φίλοι, οι A, B και Γ, έχουν από μια υπολογιστική μηχανή και αρχίζουν να κάνουν πράξεις ταυτόχρονα. Ο A ξεκινά με τον αριθμό 100 και σε κάθε βήμα προσθέτει 3, ο B ξεκινά με τον αριθμό 2018 και σε κάθε βήμα αφαιρεί 4, ενώ ο Γ ξεκινά με τον αριθμό N και στο πρώτο βήμα προσθέτει 1, στο δεύτερο βήμα 2, στο τρίτο βήμα 3, κ.ο.κ. Αν ύστερα από ν βήματα οι τρεις φίλοι καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα, να βρείτε τον αριθμό N.

Προτεινόμενη Λύση

Ύστερα από ν βήματα, ο A καταλήγει στον αριθμό $100 + 3\nu$, ενώ ο B στον αριθμό $2018 - 4\nu$. Αφού οι A και B καταλήγουν στον ίδιο αριθμό, τότε:

$$\begin{aligned} 100 + 3\nu = 2018 - 4\nu &\Rightarrow 3\nu + 4\nu = 2018 - 100 \\ &\Rightarrow 7\nu = 1918 \\ &\Rightarrow \nu = \frac{1918}{7} = 274 \end{aligned}$$

Αφού ο Γ ξεκινά από τον αριθμό N, καταλήγει στον αριθμό:

$$N + (1 + 2 + \cdots + 274) = N + \frac{274 \cdot 275}{2} = N + 137 \cdot 275 = N + 37675$$

Πρέπει λοιπόν:

$$N + 37675 = 100 + 3\nu = 100 + 3 \cdot 274 = 1022$$

Άρα:

$$N = 1022 - 37675 = -36653$$

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος χρωστά στον Γιάννη €132. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο Γιώργος να ξεπληρώσει το χρέος του, χρησιμοποιώντας κέρματα του €1 και χαρτονομίσματα των €5 και €10;

Σημείωση: Σε κάθε τρόπο μας ενδιαφέρει το πλήθος των νομισμάτων και όχι η σειρά με την οποία επιλέγονται π.χ. ένας τρόπος είναι «32 κέρματα του €1 και 10 χαρτονομίσματα των €10».

Προτεινόμενη Λύση 1

Αφού δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία δίνονται τα νομίσματα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο Γιώργος πρώτα δίνει τα κέρματα του €1. Όταν τα δώσει αυτά, το ποσό που παραμένει πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 5. Επομένως, πρέπει ακόμη να πληρωθούν €0 ή €5 ή €10, ή … ή €130 μόνο σε χαρτονομίσματα των €5 και €10.

Αν πρέπει να πληρώσει €0 ή €5, τότε ο Γιώργος δεν μπορεί να δώσει κανένα χαρτονόμισμα των €10. Άρα, υπάρχει μόνο ένας τρόπος να πληρώσει το ποσό σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις.

Αν πρέπει να πληρώσει €10 ή €15, τότε ο Γιώργος μπορεί να δώσει είτε μηδέν είτε ένα χαρτονόμισμα των €10. Άρα, υπάρχουν δύο τρόποι να πληρώσει το ποσό σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις. (Π.χ. για τα €15 οι δύο τρόποι είναι είτε να δώσει μηδέν χαρτονομίσματα των €10 και 3 χαρτονομίσματα των €5 είτε να δώσει ένα χαρτονόμισμα των €10 και ένα των €5.)

⋮

Αν πρέπει να πληρώσει €120 ή €125, τότε ο Γιώργος μπορεί να δώσει από μηδέν μέχρι δώδεκα χαρτονομίσματα των €10. Άρα, υπάρχουν 13 τρόποι να πληρώσει το ποσό σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις.

Αν πρέπει να πληρώσει €130, τότε ο Γιώργος μπορεί να δώσει από μηδέν μέχρι δεκατρία χαρτονομίσματα των €10. Άρα, υπάρχουν 14 τρόποι να πληρώσει το ποσό σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις.

Συνολικά, υπάρχουν
$$(1+1+2+2+\cdots+13+13)+14=2\cdot\frac{13\cdot 14}{2}+14=14\cdot 14=196$$
διαφορετικοί τρόποι για να πληρωθεί το ποσό.

Προτεινόμενη Λύση 2
Κάθε τρόπος εξόφλησης του χρέους του Γιώργου αντιστοιχεί με μια λύση της εξίσωσης $\kappa+5x+10y=132$, όπου κ το πλήθος των νομισμάτων του €1 και x, y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των €5, €10, αντίστοιχα.
Δηλαδή, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το να βρούμε το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της μορφής (x, y, κ) της εξίσωσης $\kappa+5x+10y=132$.

Έχουμε:
$$5x+10y=132-\kappa=\pi o\lambda 5$$

Άρα, οι τιμές που μπορεί να πάρει το κ είναι $2, 7, 12, 17, \ldots, 122, 127$ και 132.

- Για $\kappa=2$, παίρνουμε $y+2x=26$.
  Λύσεις: $(x,y)=(0,26),\ (1,24),\ldots,(13,0)$ **[14 λύσεις]**
- Για $\kappa=7$, παίρνουμε $y+2x=25$.
  Λύσεις: $(x,y)=(0,25),\ (1,23),\ldots,(12,1)$ **[13 λύσεις]**
- Για $\kappa=12$, παίρνουμε $y+2x=24$.
  Λύσεις: $(x,y)=(0,24),(1,22),\ldots,(12,0)$ **[13 λύσεις]**
- Για $\kappa=17$, παίρνουμε $y+2x=23$.
  Λύσεις: $(x,y)=(0,23),(1,21),\ldots,(11,1)$ **[12 λύσεις]**
- Για $\kappa=22$, παίρνουμε $y+2x=22$.
  Λύσεις: $(x,y)=(0,22),(1,20),\ldots,(11,1)$ **[12 λύσεις]**

  $\vdots$
- Για $\kappa=127$, παίρνουμε $y+2x=1$.
  Λύσεις: $(x,y)=(0,1)$ **[1 λύση]**
- Για $\kappa=132$, παίρνουμε $y+2x=0$.
  Λύσεις: $(x,y)=(0,0)$ **[1 λύση]**

Έτσι, έχουμε $14+13+13+12+12+\ldots+1+1=196$ διαφορετικούς τρόπους.

Πρόβλημα 4

(α) Να δείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

(β) Έστω x, y θετικοί πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει ότι $x + y = xy = y^2 - x^2$.

i. Να δείξετε ότι $x - \frac{1}{x} = 1$.

ii. Να δείξετε ότι ο $x^3 - \frac{1}{x^3}$ είναι ακέραιος αριθμός.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Ξεκινάμε κάνοντας τις πράξεις στο δεξί μέλος:

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha(\alpha + \beta) - \beta(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta - \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

(β) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα από το (α) ερώτημα, έχουμε:

$$x + y = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$$

Επειδή οι x, y είναι θετικοί, τότε $x + y > 0$. Έτσι, μπορούμε να διαιρέσουμε με το $x + y$. Διαιρώντας, παίρνουμε $y - x = 1$. Άρα, $y = 1 + x$. Επομένως:
$x + y = x + (1 + x) = 2x + 1$ και $xy = x(1 + x) = x + x^2$

Αφού $x + y = xy$, παίρνουμε:

$$2x + 1 = x + x^2 \Rightarrow x^2 - 1 = x$$

Διαιρώντας την πιο πάνω σχέση με x, το οποίο επιτρέπεται αφού $x > 0$, λαμβάνουμε το ζητούμενο του (i).

Για το (ii) παρατηρούμε ότι:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1 - 1 + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^3 - x - 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \\ &= \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - 3 \end{aligned}$$

Άρα

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = 4,$$

που είναι ακέραιος, όπως θέλαμε να δείξουμε.