ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/12/2017 *Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1

Δίνονται θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y τέτοιοι, ώστε ο αριθμός $\frac{x}{y}$ να είναι ακέραιος και να ισχύει ότι:

$$\frac{3}{7} < \frac{2x+y}{3x+10y} < \frac{4}{9}$$

Να βρείτε τον αριθμό $\frac{x}{y}$.

Προτεινόμενη Λύση

Αρχικά, έχουμε

$$\frac{3}{7} < \frac{2x+y}{3x+10y} \Rightarrow 9x+30y < 14x+7y \Rightarrow 23y < 5x \Rightarrow \frac{x}{y} > \frac{23}{5} \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 5 \qquad (1)$$

αφού ο $\frac{x}{y}$ είναι ακέραιος.

Επίσης, έχουμε

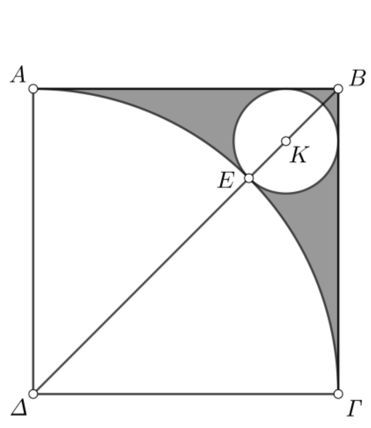
$$\frac{2x+y}{3x+10y} < \frac{4}{9} \Rightarrow 18x+9y < 12x+40y \Rightarrow 6x < 31y \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{31}{6} \Rightarrow \frac{x}{y} \leq 5 \qquad (2)$$

αφού ο $\frac{x}{y}$ είναι ακέραιος.

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\frac{x}{y} = 5$.

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο πλευράς 1 cm και το $ΑΕΓ$ είναι τόξο με κέντρο το $Δ$ και ακτίνα $ΔΓ$. Ο κύκλος με κέντρο το $Κ$ και ακτίνα $ΚΕ$ εφάπτεται στις πλευρές $ΑΒ$, $ΒΓ$ και στο τόξο $ΑΕΓ$.



(α) Να δείξετε ότι $(ΚΕ) = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ cm.

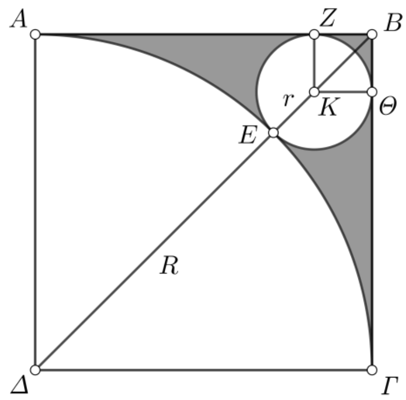
(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$:

$$(B\Delta)^2 = (AB)^2 + (A\Delta)^2 \Rightarrow (B\Delta)^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (B\Delta) = \sqrt{2}\ \mathrm{cm}$$

Επομένως, $(BE) = (B\Delta) - (\Delta E) = \left(\sqrt{2} - 1\right)\ \mathrm{cm}.$



Φέρουμε τις ακτίνα $KZ = K\Theta = r$, όπου Z, Θ τα σημείο επαφής του κύκλου (K, KE) με τις $AB, B\Gamma$, αντίστοιχα. Έχουμε ότι $KZ \perp AB$ και $K\Theta \perp B\Gamma$, από το Θεώρημα Ακτίνας και Εφαπτομένης.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο BKZ:

$$\begin{aligned}(BK)^2 = (BZ)^2 + (KZ)^2 &\Rightarrow (BK)^2 = 2r^2 \\ &\Rightarrow (BK) = r\sqrt{2}\ \mathrm{cm}\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}(KE) = (BE) - (BK) &\Rightarrow r = \sqrt{2} - 1 - r\sqrt{2} \\ &\Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \\ &\Rightarrow r = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} \Rightarrow r = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)\ \mathrm{cm}\end{aligned}$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}&E_{AB\Gamma\Delta} = 1^2 = 1\ \mathrm{cm}^2 \\ &E_{\tau\varepsilon\tau.\Delta A\Gamma} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}\ \mathrm{cm}^2 \\ &E_{\delta\iota\sigma\kappa.(K,r)} = \pi r^2 = \pi\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 = \left(17 - 12\sqrt{2}\right)\pi\ \mathrm{cm}^2\end{aligned}$$

Έστω $E_{\sigma\kappa}$ το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής. Έχουμε:

$$E_{\sigma\kappa} = E_{AB\Gamma\Delta} - \left(E_{\tau\varepsilon\tau.\Delta A\Gamma} + E_{\delta\iota\sigma\kappa.(K,r)}\right) = 1 - \left(\frac{69}{4} - 12\sqrt{2}\right)\pi = \left(\left(12\sqrt{2} - \frac{69}{4}\right)\pi + 1\right)\ \mathrm{cm}^2$$

Πρόβλημα 3

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{12345^2}{54321 \cdot 66666} + \frac{54321^2}{12345 \cdot 66666} - \frac{66666^2}{12345 \cdot 54321}$$

Προτεινόμενη Λύση

Θέτουμε $\alpha = 12345, \beta = 54321$ και $\gamma = 66666$. Επομένως:

$$A = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} - \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^3 + \beta^3 - \gamma^3}{\alpha\beta\gamma} \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha+\beta=\gamma$. Επομένως, από την (1) έχουμε:

$$A=\frac{\alpha^3+\beta^3-(\alpha+\beta^3)}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\alpha^3+\beta^3-(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}\overset{(1)}{=}\frac{-3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-3$$

Πρόβλημα 4

Έστω α,β,γ ακέραιοι αριθμοί, για τους οποίους ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}{2}$ είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου αριθμού.

Προτεινόμενη Λύση 1

Έστω α,β,γ ακέραιοι αριθμοί, για τους οποίους ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma=0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma=0 &\Rightarrow \alpha+\beta=-\gamma \Rightarrow (\alpha+\beta)^2=\gamma^2 \Rightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\gamma^2\\
&\Rightarrow \alpha^2+\beta^2-\gamma^2=-2\alpha\beta \Rightarrow (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2=4\alpha^2\beta^2\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2=4\alpha^2\beta^2\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2[(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2\alpha^2\beta\gamma-2\alpha\beta^2\gamma-2\alpha\beta\gamma^2]\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2[(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)]\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2[(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2\alpha\beta\gamma\cdot 0]\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2\\
&\Rightarrow \frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}{2}=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2
\end{aligned}$$

Προτεινόμενη Λύση 2

Έστω α,β,γ ακέραιοι αριθμοί, για τους οποίους ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma=0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma=0 &\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2=0 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma=0\\
&\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \Rightarrow (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=4(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2\\
&\qquad\qquad =4(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha\beta\gamma^2)\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2+8\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2+8\alpha\beta\gamma\cdot 0\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2[(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2\alpha^2\beta\gamma-2\alpha\beta^2\gamma-2\alpha\beta\gamma^2]\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-4\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\
&\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-4\alpha\beta\gamma\cdot 0\\
&\Rightarrow \frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}{2}=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2
\end{aligned}$$