ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 2/12/17 *Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1: Να απλοποιήσετε την παράσταση $A=\sqrt[5]{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\sqrt[10]{\frac{19+6\sqrt{10}}{2}}$

Λύση

Είναι $A>0$ και έχουμε $A^{10}=\left(\sqrt[5]{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\right)^{10}\cdot\left(\sqrt[10]{\frac{19+6\sqrt{10}}{2}}\right)^{10}\Longrightarrow$

$$A^{10}=\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{19+6\sqrt{10}}{2}\Longrightarrow$$
$$A^{10}=\left(38-12\sqrt{10}\right)\cdot\frac{19+6\sqrt{10}}{2}\Longrightarrow$$
$$A^{10}=2\left(19-6\sqrt{10}\right)\cdot\frac{19+6\sqrt{10}}{2}\Longrightarrow$$
$$A^{10}=\left(19-6\sqrt{10}\right)\cdot\left(19+6\sqrt{10}\right)\Longrightarrow$$
$$A^{10}=19^2-\left(6\sqrt{10}\right)^2\Longrightarrow$$
$$A^{10}=1\overset{A>0}{\Longrightarrow}A=1$$

Πρόβλημα 2: Έστω ν ένας θετικός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι:
(i) Το άθροισμα Σ των άρτιων αριθμών, που βρίσκονται μεταξύ των θετικών ακεραίων $\nu^2-\nu+1$ και $\nu^2+\nu+1$, είναι $\Sigma=\nu^3+\nu$.
(ii) Ο ακέραιος $\Sigma+\nu$ διαιρείται με το 3.

Λύση

(i) Έχουμε, $\nu^2-\nu+1=\nu(\nu-1)+1$ και $\nu^2+\nu+1=\nu(\nu+1)+1$, οπότε και οι δύο είναι θετικοί ακέραιοι, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$. Άρα ο ελάχιστος θετικός άρτιος μεταξύ των θετικών ακεραίων $\nu^2-\nu+1$ και $\nu^2+\nu+1$, είναι ο $\nu^2-\nu+2$ και ο μέγιστος ο $\nu^2+\nu$. Έτσι, έχουμε:

$\Sigma=(\nu^2-\nu+2)+(\nu^2-\nu+4)+\cdots+(\nu^2+\nu-2)+(\nu^2+\nu)\Longrightarrow$

$\Sigma=(\nu^2-\nu)+2+(\nu^2-\nu)+4+\cdots+(\nu^2-\nu)+2\nu-2+(\nu^2-\nu)+2\nu\Longrightarrow$

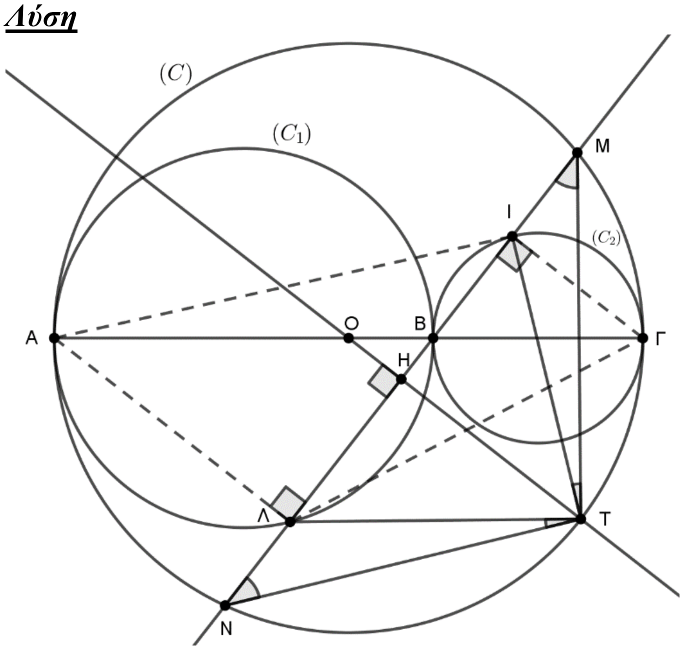
$\Sigma = \nu(\nu^2 - \nu) + (2 + 4 + \cdots + (2\nu - 2) + 2\nu) \Longrightarrow$
$\Sigma = \nu(\nu^2 - \nu) + 2(1 + 2 + \cdots + (\nu - 1) + \nu) \Longrightarrow$
$\Sigma = \nu(\nu^2 - \nu) + 2 \cdot \dfrac{\nu(\nu + 1)}{2} \Longrightarrow$
$\Sigma = \nu^3 - \nu^2 + \nu^2 + \nu \Longrightarrow$
$\Sigma = \nu^3 + \nu.$
(ii) $\Sigma + \nu = \nu^3 + 2\nu.$

Είναι $\nu = 3\kappa$ ή $\nu = 3\kappa + 1$ ή $\nu = 3\kappa + 2$, $\kappa \in \mathbb{N}$.

- Αν $\nu = 3\kappa$, τότε $\Sigma + \nu = \nu^3 + 2\nu = 27\kappa^3 + 6\kappa$, άρα $3 \,/\, \Sigma + \nu$.
- Αν $\nu = 3\kappa + 1$, τότε
  $\Sigma + \nu = \nu^3 + 2\nu = (3\kappa + 1)^3 + 2(3\kappa + 1) = 27\kappa^3 + 27\kappa^2 + 15\kappa + 3$, άρα $3 \,/\, \Sigma + \nu$.
- Αν $\nu = 3\kappa + 2$, τότε
  $\Sigma + \nu = \nu^3 + 2\nu = (3\kappa + 2)^3 + 2(3\kappa + 2) = 27\kappa^3 + 54\kappa^2 + 42\kappa + 12$, άρα $3 \,/\, \Sigma + \nu$.

Πρόβλημα 3: Θεωρούμε δύο κύκλους (C_1) και (C_2), που εφάπτονται εξωτερικά στο B και φέρουμε τις διαμέτρους τους AB και $B\Gamma$, αντίστοιχα. Γράφουμε τον κύκλο (C), διαμέτρου $A\Gamma$. Έστω I σημείο ενός από τα δύο ημικύκλια, διαμέτρου $B\Gamma$ του κύκλου (C_2). Η ευθεία IB τέμνει τον (C_1) στο Λ και τον (C) στα σημεία N, M ώστε το Λ να βρίσκεται μεταξύ N και B. Από το κέντρο O του κύκλου (C) φέρουμε την κάθετη στην MN, που τέμνει τον κύκλο (C) στο T.
Να αποδείξετε ότι $\angle NT\Lambda = \angle MTI$.

Λύση



Η OT είναι κάθετη στη χορδή MN, άρα είναι η μεσοκάθετη του MN.
Έτσι, το τρίγωνο $\triangle TMN$ είναι ισοσκελές, απ' όπου $TM = TN$: (1) και
$\angle TMN = \angle TNM$: (2).

$\angle A\Lambda B = 90^0$ (εγγεγραμμένη του (C_1), που βαίνει σε ημικύκλιο) και
$\angle BI\Gamma = 90^0$ (εγγεγραμμένη του (C_2), που βαίνει σε ημικύκλιο). Άρα $A\Lambda \parallel I\Gamma$, δηλαδή το τετράπλευρο $AI\Gamma\Lambda$ είναι τραπέζιο, με βάσεις $A\Lambda, I\Gamma$.
Το O είναι το μέσον της μίας διαγωνίου $A\Gamma$ του τραπεζίου και, επειδή
$OH \parallel A\Lambda \parallel I\Gamma$, το H είναι το μέσον της άλλης διαγωνίου ΛI του τραπεζίου. Άρα,
$MI = MH - IH = NH - \Lambda H = N\Lambda$: (3).
Από τις (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle NT\Lambda$, $\triangle MTI$ είναι ίσα, συνεπώς
$\angle NT\Lambda = \angle MTI$.

Πρόβλημα 4: Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών και πρώτων ακεραίων (μ, ν), για τα οποία ο αριθμός $\mu^2 + 7\mu\nu + 9\nu^2$ είναι τέλειο τετράγωνο θετικού ακεραίου.
(Ένας θετικός ακέραιος A είναι τέλειο τετράγωνο θετικού ακεραίου, όταν υπάρχει θετικός ακέραιος α, ώστε $A = \alpha^2$).

Λύση
Θέλουμε $\mu^2 + 7\mu\nu + 9\nu^2 = \alpha^2 : (1)$, με α θετικό ακέραιο.

$(1) \Longrightarrow (\mu + 3\nu)^2 + \mu\nu = \alpha^2 \Longrightarrow \mu\nu = (\alpha - \mu - 3\nu)(\alpha + \mu + 3\nu).$

Ο δεύτερος παράγοντας $(\alpha + \mu + 3\nu)$ είναι μεγαλύτερος του μ και του ν και, από την τελευταία ισότητα, διαιρέτης του $\mu\nu$. Επειδή οι αριθμοί μ και ν είναι πρώτοι, έχουμε:

$\alpha + \mu + 3\nu = \mu\nu$ και $\alpha - \mu - 3\nu = 1$. Αφαιρούμε τις τελευταίες κατά μέλη:

$$
\begin{aligned}
2\mu + 6\nu = \mu\nu - 1 &\Longrightarrow \mu\nu - 2\mu - 6\nu = 1 \\
&\Longrightarrow \mu\nu - 2\mu - 6\nu + 12 = 13 \\
&\Longrightarrow \mu(\nu - 2) - 6(\nu - 2) = 13 \\
&\Longrightarrow (\mu - 6)(\nu - 2) = 13 : (2)
\end{aligned}
$$

Είναι, $\nu > 2 \Longrightarrow \nu - 2 > 0$, άρα από τη (2) είναι και $\mu - 6 > 0 \Longrightarrow \mu > 6$.

Από τη (2) έχουμε:

- $\begin{cases} \mu - 6 = 1 \\ \nu - 2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 7 \\ \nu = 15 \end{cases}$, που απορρίπτεται,αφού ο ν είναι πρώτος.

- $\begin{cases} \mu - 6 = 13 \\ \nu - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 19 \\ \nu = 3 \end{cases}$

Άρα $\boxed{(\mu, \nu) = (19, 3)}$ και $\mu^2 + 7\mu\nu + 9\nu^2 = 19^2 + 7 \cdot 19 \cdot 3 + 9 \cdot 3^2 = 841 = 29^2$.