ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 2/12/17 *Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1: (α) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\theta \in (0,\pi)$ για την οποία η συνάρτηση f με $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2(x+\theta) - \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(x+\theta), x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

(β) Να βρείτε την τιμή της f .

Λύση

(α)

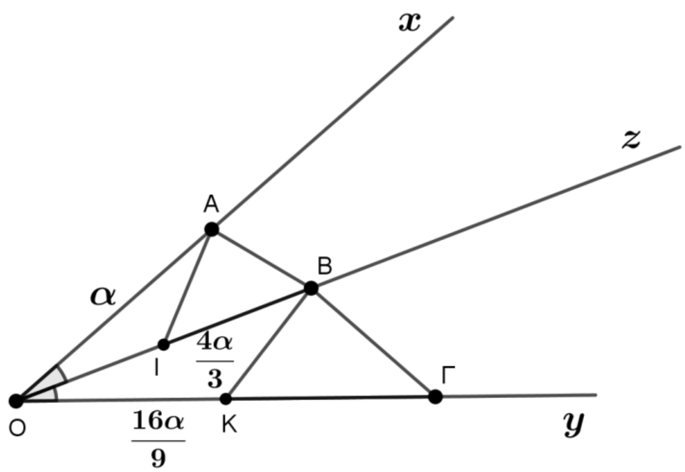
$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2(x+\theta) - \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(x+\theta) \\
&= \sigma\upsilon\nu^2 x + (\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu x\eta\mu\theta)^2 - \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu x\eta\mu\theta) = \\
&\quad \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu^2 x\eta\mu^2\theta - \\
&\quad -\sigma\upsilon\nu^2 x\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\eta\mu\theta = \\
&\sigma\upsilon\nu^2 x(1+\sigma\upsilon\nu^2\theta - \sigma\upsilon\nu\theta) + (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\eta\mu^2\theta - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\eta\mu\theta(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1) \\
&= \sigma\upsilon\nu^2 x(1+\sigma\upsilon\nu^2\theta - \sigma\upsilon\nu\theta) + \eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu^2\theta - \\
&\quad -\frac{1}{2}\eta\mu 2x\eta\mu\theta(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1) \\
&= \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2 x(1+\sigma\upsilon\nu^2\theta - \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu^2\theta) - \frac{1}{2}\eta\mu 2x\eta\mu\theta(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1) \\
&= \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2 x(1+\sigma\upsilon\nu^2\theta - \sigma\upsilon\nu\theta - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta) - \frac{1}{2}\eta\mu 2x\eta\mu\theta(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1) \\
&= \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2 x\sigma\upsilon\nu\theta(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1) - \frac{1}{2}\eta\mu 2x\eta\mu\theta(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1) \\
&= \eta\mu^2\theta + (2\sigma\upsilon\nu\theta - 1)\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}\eta\mu 2x\eta\mu\theta\right).
\end{aligned}$$

Η f σταθερή, όταν $2\sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$, απ’ όπου $\theta = \frac{\pi}{3}$ $\left(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \ \theta \in (0,\pi)\right)$.

(β) $f(x) = \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2: Δίνεται γωνία $\angle xOy$ και Oz η διχοτόμος της. Στην πλευρά Ox παίρνουμε τμήμα OA με $(OA) = \alpha$, στη διχοτόμο Oz παίρνουμε τμήμα OB με $(OB) = \frac{4\alpha}{3}$ και στην πλευρά Oy παίρνουμε τμήμα $O\Gamma$ με $(O\Gamma) = \frac{16\alpha}{9}$. Αν το σημείο I είναι το μέσον του OB και το σημείο K είναι το μέσον του $O\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔBIA και $\Delta BK\Gamma$ είναι όμοια.

Λύση



Για τα τρίγωνα ΔOAB και $\Delta O\Gamma B$ έχουν

- $\angle AOB = \angle \Gamma OB$
- $\frac{OA}{OB} = \frac{\alpha}{\frac{4\alpha}{3}} = \frac{3}{4}$
- $\frac{OB}{O\Gamma} = \frac{\frac{4\alpha}{3}}{\frac{16\alpha}{9}} = \frac{4 \cdot 9}{16 \cdot 3} = \frac{3}{4}$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΔOAB και $\Delta O\Gamma B$ είναι όμοια και επομένως θα έχουμε

$$\angle OBA = \angle O\Gamma B \quad (1)$$

και

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{O\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma} \qquad (2)$$

Αλλά έχουμε

$$OB = 2IB \ \ \kappa\alpha\iota \ O\Gamma = 2K\Gamma$$

Άρα,

$$\frac{OB}{O\Gamma} = \frac{IB}{K\Gamma}$$

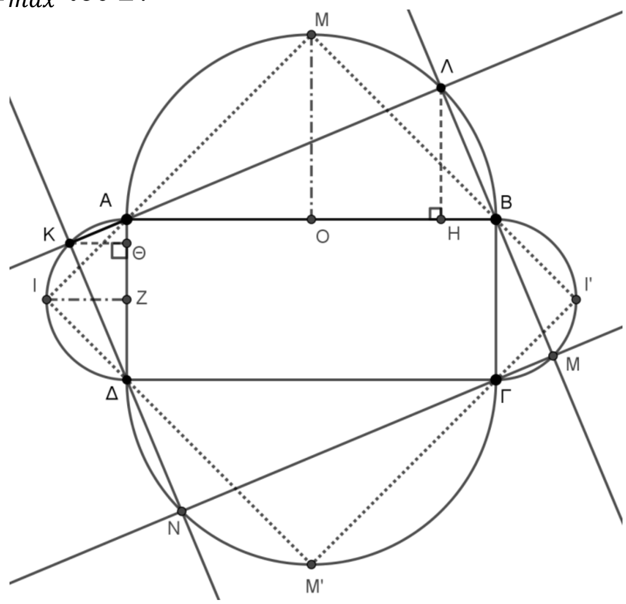
Τότε από την (2) έχουμε

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{IB}{K\Gamma} \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3) συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΔBIA και $\Delta BK\Gamma$ είναι όμοια.

Πρόβλημα 3: Θεωρούμε ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με διαστάσεις $α, β$ με $α \neq β$. Από τις κορυφές $Α, Γ$ φέρουμε παράλληλες ευθείες $(ε_1), (ε_2)$, οι οποίες δεν έχουν άλλο κοινό σημείο με το ορθογώνιο και στη συνέχεια φέρουμε από τις κορυφές $Β, Δ$ ευθείες $(ε_3), (ε_4)$ κάθετες στις $(ε_1), (ε_2)$. Οι ευθείες $(ε_1), (ε_2), (ε_3), (ε_4)$ σχηματίζουν ένα νέο ορθογώνιο $ΚΛΜΝ$, του οποίου το εμβαδόν συμβολίζουμε με $Ε$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή E_{max} του $Ε$.

Λύση 1η :



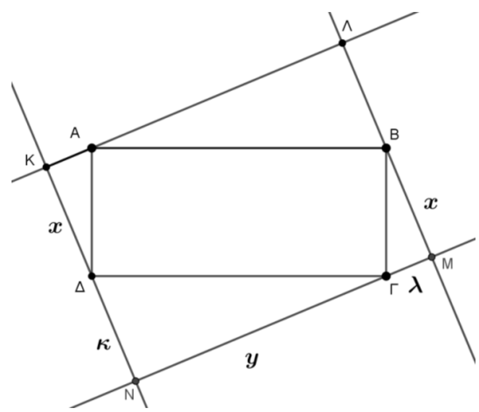
Παρατηρούμε ότι από τις κορυφές $Κ, Λ, Μ, Ν$ του ορθογωνίου $ΚΛΜΝ$ διέρχονται κύκλοι διαμέτρου $ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ αντίστοιχα. Επειδή οι βάσεις των τριγώνων $ΔΑΜΒ, ΔΒΙ'Γ, ΔΓΜ'Δ, ΔΔΙΑ$ έχουν σταθερό μήκος για τις βάσεις τους $α, β$, θα έχουμε το μέγιστο εμβαδόν τους όταν τα ύψη τους προς τις βάσεις τους $ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ έχουμε μέγιστο μήκος. Αυτό γίνεται όταν τα ύψη ισούνται με τις ακτίνες των κύκλων, δηλαδή

$$ΜΟ = \frac{α}{2} \quad και \quad ΙΖ = \frac{β}{2}$$

Τότε θα έχουμε

$$E_{max} = 2\frac{1}{2}α \cdot \frac{α}{2} + 2\frac{1}{2}β \cdot \frac{β}{2} + αβ$$
$$= \frac{α^2}{2} + \frac{β^2}{2} + αβ = \frac{1}{2}(α+β)^2.$$

Λύση 2η (με ανάλυση)



Αν ονομάσουμε τα τμήματα $ΔΝ, ΝΓ, ΓΜ, ΜΒ$ με $κ, y, λ, x$ αντίστοιχα θα έχουμε από την ομοιότητα των τριγώνων $ΔΒΓΜ \approx ΔΓΔΝ$ ότι

$$\frac{x}{λ} = \frac{y}{κ} \qquad (1)$$

Επίσης από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε

$$y^2 + κ^2 = α^2 \qquad (2)$$
$$x^2 + λ^2 = β^2 \qquad (3)$$

Το $Ε$ του ορθογώνιου $ΚΛΜΝ$ είναι

$$Ε = αβ + κy + λx \qquad (4)$$

Η (1) μας δίνει $κ = \frac{λy}{x}$, και λόγω αυτής από την (2) παίρνουμε

$$y^2 + \left(\frac{λy}{x}\right)^2 = α^2 \iff y^2(x^2 + λ^2) = α^2 x^2$$

Η τελευταία ισότητα λόγω της (3) μας δίνει

$$\frac{x}{y} = \frac{β}{α} \iff y = \frac{αx}{β} \qquad (5)$$

Από τις (1) και (5) έχουμε

$$\frac{\lambda}{\kappa}=\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow \kappa=\frac{\alpha\lambda}{\beta}$$

Αντικαθιστώντας από την (3) το $\lambda=\sqrt{\beta^2-x^2}$ (6) έχουμε

$$\kappa=\frac{\alpha\sqrt{\beta^2-x^2}}{\beta} \quad (7)$$

Επομένως η (4) λόγω των $(5),(6)$ $και$ (7) γίνεται

$$E(x)=\alpha\beta+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}x\sqrt{\beta^2-x^2}\,, \qquad x\in(0,\beta)$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση έχουμε

$$E'(x)=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2-2x^2}{\sqrt{\beta^2-x^2}}\right)$$

$$E'(x)=0\Longrightarrow x=\frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

Επειδή,

$$E''(x)=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}\left(\frac{-5x\beta^2+6x^3}{\sqrt{\beta^2-x^2}}\right)$$

και

$$E''\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)=-2(\alpha^2+\beta^2)<0$$

θα έχουμε μέγιστη τιμή για το E στο $(0,\beta)$ για $x=\frac{\beta}{\sqrt{2}}$. Από τα προηγούμενα θα έχουμε

$$y=\frac{\alpha}{\sqrt{2}},\quad \kappa=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\quad και\ \ \lambda=\frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

Επομένως,

$$E_{max}=\alpha\beta+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2}{2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2.$$

Πρόβλημα 4: Δίνεται το σύνολο $A=\left\{2006+|6^{2\mu}-5^{\nu}|,\ \ με\ \mu,\nu\in\{1,2,3,\dots\}\right\}$.
Να βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου A.

Λύση:

Αρκεί να βρούμε το ελάχιστο στοιχείο του $|6^{2\mu}-5^{\nu}|$ $με$ $\mu,\nu\in\{1,2,3,\dots\}$.
Αφού το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $6^{2\mu}$ είναι το 6 και το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 5^{ν} είναι το 5, τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $6^{2\mu}-5^{\nu}>0$ ή $6^{2\mu}>5^{\nu}$ τότε το τελευταίο ψηφίο της διαφοράς θα είναι το 1.
- Αν $5^{\nu}>6^{2\mu}$ τότε το τελευταίο ψηφίο της διαφοράς θα είναι το 9.

Εξετάζουμε την περίπτωση η διαφορά να είναι μονοψήφιος αριθμός.

- Αν $6^{2\mu}-5^{\nu}=1\Leftrightarrow 5^{\nu}=6^{2\mu}-1=(6^{\mu}-1)(6^{\mu}+1)$. Τότε ο αριθμός $6^{\mu}+1$ θα πρέπει να είναι δύναμη του 5, που είναι άτοπο.

Ο αριθμός $6^{2\mu} - 5^{\nu}$ δεν μπορεί να είναι ούτε -1 ούτε 9.

- Αν $5^{\nu} - 6^{2\mu} = 9 \Longrightarrow 5^{\nu} = 9 + 6^{2\mu} = 9\left(1 + \frac{36^{\mu}}{9}\right) = 9\left(1 + \frac{4^{\mu}9^{\mu}}{9}\right) = 9(1 + 4^{\mu}9^{\mu-1}) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow 5^{\nu} = 9[1 + 4 \cdot 36^{\mu-1}] = \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 9$$

που είναι άτοπο.

Επομένως για $\mu = 1\ \ \kappa\alpha\iota\ \nu = 2$ θα έχουμε $6^{2\mu} - 5^{\nu} = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$, που είναι ο ελάχιστος αριθμός αυτής της μορφής. Άρα το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου A είναι το $2006 + 11 = 2017$.