ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 2/12/17 *Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, με τις ιδιότητες:
(i) f συνεχής στο $[0,+\infty)$
(ii) f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$
(iii) $f(0)=0$
(iv) Η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα πάνω στο $(0,+\infty)$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g\colon (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, με $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.
Να αποδείξετε ότι $\pi \cdot f(e) < e \cdot f(\pi)$.

Λύση

Για την συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[0,x]$. Επομένως θα έχουμε
Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$$

Παραγωγίζοντας την g θα έχουμε

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\left(f'(x)-\frac{f(x)}{x}\right)$$

και από την προηγούμενη ισότητα θα έχουμε

$$g'(x)=\frac{1}{x}\big(f'(x)-f'(\xi)\big)$$

Όμως από την υπόθεση ότι η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο $(0,+\infty)$ θα έχουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[0,+\infty)$. Επομένως

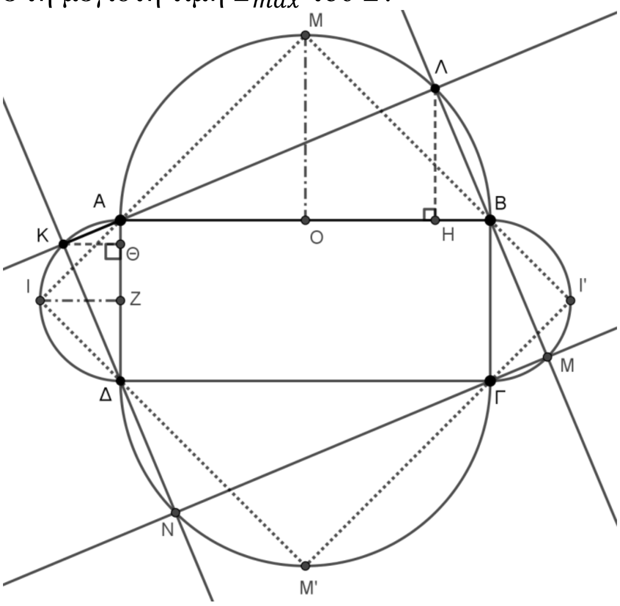
$$0<\xi<x \implies f'(\xi)<f'(x) \text{ ή } f'(x)-f'(\xi)>0$$

Άρα, $g'(x)>0$ $\sigma\tau o$ $(0,+\infty)$ δηλαδή η g γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0,+\infty)$.
Επομένως

$$e<\pi \Rightarrow g(e)<g(\pi) \text{ ή } \frac{f(e)}{e}<\frac{f(\pi)}{\pi} \text{ ή } \pi\cdot f(e)<e\cdot f(\pi).$$

Πρόβλημα 2: Θεωρούμε ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με διαστάσεις α, β με $\alpha \neq \beta$. Από τις κορυφές $Α, Γ$ φέρουμε παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, οι οποίες δεν έχουν άλλο κοινό σημείο με το ορθογώνιο και στη συνέχεια φέρουμε από τις κορυφές $Β, Δ$ ευθείες $(\varepsilon_3), (\varepsilon_4)$ κάθετες στις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$. Οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3), (\varepsilon_4)$ σχηματίζουν ένα νέο ορθογώνιο $ΚΛΜΝ$, του οποίου το εμβαδόν συμβολίζουμε με $Ε$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή E_{max} του $Ε$.

Λύση 1η :



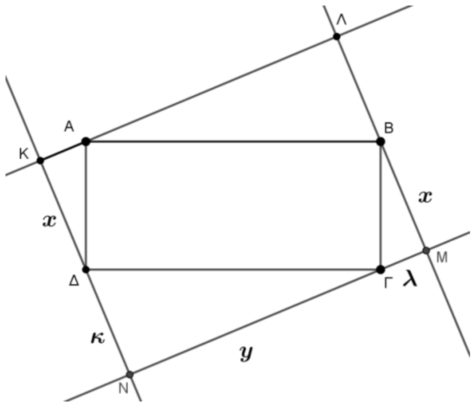
Παρατηρούμε ότι από τις κορυφές $Κ, Λ, Μ, Ν$ του ορθογωνίου $ΚΛΜΝ$ διέρχονται κύκλοι διαμέτρου $ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ αντίστοιχα. Επειδή οι βάσεις των τριγώνων $ΔΑΜΒ, ΔΒΙ'Γ, ΔΓΜ'Δ, ΔΔΙΑ$ έχουν σταθερό μήκος για τις βάσεις τους α, β , θα έχουμε το μέγιστο εμβαδόν τους όταν τα ύψη τους προς τις βάσεις τους $ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ έχουμε μέγιστο μήκος. Αυτό γίνεται όταν τα ύψη ισούνται με τις ακτίνες των κύκλων, δηλαδή

$$MO = \frac{\alpha}{2} \quad \kappa\alpha\iota \ IZ = \frac{\beta}{2}$$

Τότε θα έχουμε

$$E_{max} = 2\frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} + 2\frac{1}{2}\beta \cdot \frac{\beta}{2} + \alpha\beta$$
$$= \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} + \alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2.$$

Λύση 2η (με ανάλυση)



Αν ονομάσουμε τα τμήματα $ΔΝ, ΝΓ, ΓΜ, ΜΒ$ με κ, y, λ, x αντίστοιχα θα έχουμε από την ομοιότητα των τριγώνων $ΔΒΓΜ \approx ΔΓΔΝ$ ότι

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\kappa} \qquad (1)$$

Επίσης από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε

$$y^2 + \kappa^2 = \alpha^2 \qquad (2)$$
$$x^2 + \lambda^2 = \beta^2 \qquad (3)$$

Το $Ε$ του ορθογώνιου $ΚΛΜΝ$ είναι

$$E = \alpha\beta + \kappa y + \lambda x \qquad (4)$$

Η (1) μας δίνει $\kappa = \frac{\lambda y}{x}$, και λόγω αυτής από την (2) παίρνουμε

$$y^2 + \left(\frac{\lambda y}{x}\right)^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow y^2(x^2+\lambda^2) = \alpha^2 x^2$$

Η τελευταία ισότητα λόγω της (3) μας δίνει

$$\frac{x}{y} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow y = \frac{\alpha x}{\beta} \qquad (5)$$

Από τις (1) και (5) έχουμε

$$\frac{\lambda}{\kappa} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \kappa = \frac{\alpha\lambda}{\beta}$$

Αντικαθιστώντας από την (3) το $\lambda = \sqrt{\beta^2 - x^2}$ (6) έχουμε

$$\kappa = \frac{\alpha\sqrt{\beta^2 - x^2}}{\beta} \qquad (7)$$

Επομένως η (4) λόγω των (5), (6) $\kappa\alpha\iota$ (7) γίνεται

$$E(x) = \alpha\beta + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2} x\sqrt{\beta^2 - x^2}, \qquad x \in (0, \beta)$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση έχουμε

$$E'(x) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2 - 2x^2}{\sqrt{\beta^2 - x^2}}\right)$$

$$E'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

Επειδή,

$$E''(x) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2}\left(\frac{-5x\beta^2 + 6x^3}{\sqrt{\beta^2 - x^2}}\right)$$

και

$$E''\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) = -2(\alpha^2 + \beta^2) < 0$$

θα έχουμε μέγιστη τιμή για το E στο $(0, \beta)$ για $x = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$. Από τα προηγούμενα θα έχουμε

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \kappa = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \kappa\alpha\iota \;\; \lambda = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

Επομένως,

$$E_{max} = \alpha\beta + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2.$$

<u>Πρόβλημα 3:</u> Δίνεται το σύνολο $A = \left\{2006 + |6^{2\mu} - 5^{\nu}|,\ \mu\varepsilon\ \mu, \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}\right\}$.
Να βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου A.

<u>Λύση:</u>

Αρκεί να βρούμε το ελάχιστο στοιχείο του $|6^{2\mu} - 5^{\nu}|\ \mu\varepsilon\ \mu, \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}$.
Αφού το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $6^{2\mu}$ είναι το 6 και το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 5^{ν} είναι το 5, τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $6^{2\mu} - 5^{\nu} > 0$ ή $6^{2\mu} > 5^{\nu}$ τότε το τελευταίο ψηφίο της διαφοράς θα είναι το 1.
- Αν $5^{\nu} > 6^{2\mu}$ τότε το τελευταίο ψηφίο της διαφοράς θα είναι το 9.

Εξετάζουμε την περίπτωση η διαφορά να είναι μονοψήφιος αριθμός.

- Αν $6^{2\mu} - 5^{\nu} = 1 \Leftrightarrow 5^{\nu} = 6^{2\mu} - 1 = (6^{\mu} - 1)(6^{\mu} + 1)$. Τότε ο αριθμός $6^{\mu} + 1$ θα πρέπει να είναι δύναμη του 5, που είναι άτοπο.

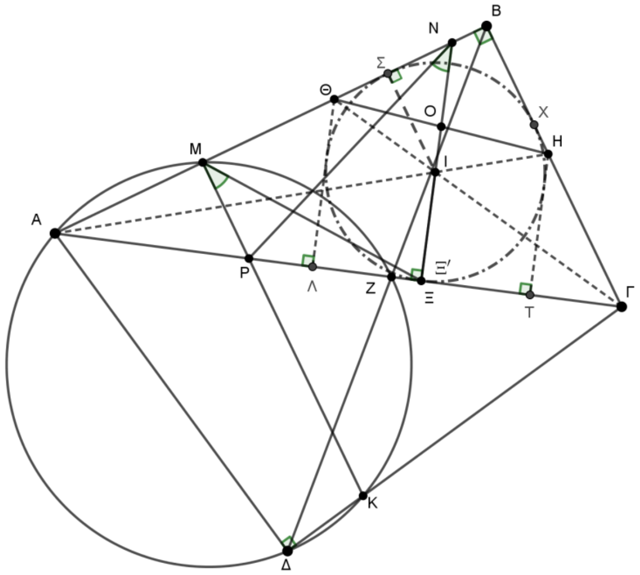
Ο αριθμός $6^{2\mu} - 5^{\nu}$ δεν μπορεί να είναι ούτε -1 ούτε 9.

- Αν $5^{\nu} - 6^{2\mu} = 9 \Longrightarrow 5^{\nu} = 9 + 6^{2\mu} = 9\left(1 + \frac{36^{\mu}}{9}\right) = 9\left(1 + \frac{4^{\mu}9^{\mu}}{9}\right) = 9(1 + 4^{\mu}9^{\mu-1}) \Longrightarrow\Longrightarrow 5^{\nu} = 9[1 + 4 \cdot 36^{\mu-1}] = \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 9$

που είναι άτοπο.
Επομένως για $\mu = 1\ \kappa\alpha\iota\ \nu = 2$ θα έχουμε $6^{2\mu} - 5^{\nu} = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$, που είναι ο ελάχιστος αριθμός αυτής της μορφής.
Άρα το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου A είναι το $2006 + 11 = 2017$.

Πρόβλημα 4: Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, με $\angle Β = \angle Δ = 90^0$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\angle ΒΑΓ$ και $\angle ΒΓΑ$ τέμνονται στο σημείο $Ι$ και τέμνουν τις πλευρές $ΒΓ$ και $ΑΒ$ στα σημεία $Η$ και $Θ$, αντίστοιχα. Έστω $Ο$ το περίκεντρο του τριγώνου $\triangle ΒΘΗ$. Η ευθεία $ΟΙ$ τέμνει τις ευθείες $ΑΓ$ και $ΑΒ$ στα σημεία $Ξ$ και $Ν$, αντίστοιχα. Σημειώνουμε με $Ζ$ το σημείο τομής των διαγωνίων $ΑΓ, ΒΔ$ του $ΑΒΓΔ$ και έστω ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\triangle ΑΔΖ$ τέμνει για δεύτερη φορά τις ευθείες $ΑΒ$ και $ΓΔ$ στα σημεία $Μ$ και $Κ$, αντίστοιχα. Αν $Ρ$ το σημείο τομής των ευθειών $ΜΚ$ και $ΑΓ$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $Μ, Ν, Ξ, Ρ$ βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.

Λύση



Στο σχήμα μας θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $Μ, Ν, Ξ, Ρ$ βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $ΡΜΝΞ$ είναι εγγράψιμο.

Επειδή τα σημεία $Α, Μ, Κ, Δ$ είναι ομοκυκλικά και $\angle Δ = 90^0$, θα έχουμε ότι

$$\angle ΑΜΚ = 90^0$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $ΟΙ \perp ΑΓ$.

Έστω $Λ, Ξ', Τ$ οι ορθές προβολές των σημείων $Θ, Ι, Η$ πάνω στην $ΑΓ$. Τότε το $ΙΞ'$ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\triangle ΑΒΓ$ και έστω $Σ, Χ$ τα σημεία επαφής του με τις πλευρές $ΑΒ, ΒΓ$ αντίστοιχα. Επειδή η $ΑΗ$ είναι διχοτόμος της $\angle ΒΑΓ$ τότε

$$ΑΤ = ΑΒ$$

και για τα εφαπτόμενα τμήματα $ΑΞ', ΑΣ$ προς τον εγγεγραμμένο κύκλο θα έχουμε

$$ΑΞ' = ΑΣ$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω ισότητες έχουμε

$$ΑΤ - ΑΞ' = ΑΒ - ΑΣ = ΒΣ = ΒΧ.$$

Όμοια,

Επειδή η ΑΘ είναι διχοτόμος της $\angle ΒΓΑ$ τότε

$$ΓΛ = ΓΑ$$

και για τα εφαπτόμενα τμήματα $ΑΞ', ΑΣ$ προς τον εγγεγραμμένο κύκλο θα έχουμε

$$ΓΞ' = ΓΧ$$

Αφαιρώντας τις τελευταίες ισότητες έχουμε

$$ΓΛ - ΓΞ' = ΓΑ - ΓΧ = ΒΧ = ΒΣ.$$

Επομένως,

$$ΛΞ' = Ξ'Τ$$

Δηλαδή το $Ξ'$ είναι το μέσον του $ΛΤ$. Από το θεώρημα του Θαλή συμπεραίνουμε ότι η $ΙΞ'$ θα περνά από το μέσον του $ΘΗ$ που είναι το σημείο $Ο$ αφού το $\triangle ΑΘΗ$ είναι ορθογώνιο. Άρα $Ξ' \equiv Ξ$. Επομένως

$$ΟΙ \perp ΑΓ$$

Δηλαδή, το τετράπλευρο $ΡΜΝΞ$ είναι εγγράψιμο και άρα τα σημεία $Μ, Ν, Ξ, Ρ$ βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.