	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2019*** ***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ*** ***Παρασκευή 1 Φεβρουαρίου 2019 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ*** ***Τάξη: Α΄ Γυμνασίου***	ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΧΟΛΕΙΟ……………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης 10:15	Ώρα λήξης 10:30	Ώρα παράδοσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Οι αριθμοί Π, K, P, Σ και T αντιπροσωπεύουν τους βαθμούς πέντε διαγωνισμάτων ενός μαθητή της Α΄ Γυμνασίου στα Μαθηματικά στο Α΄ Τετράμηνο. Για τους βαθμούς αυτούς ξέρουμε:

- Οι αριθμοί Π, K, P, Σ και T είναι πέντε διαφορετικοί ακέραιοι αριθμοί από το 2 μέχρι και το 19.
- Ο Π είναι διψήφιος πρώτος αριθμός που τα ψηφία του έχουν άθροισμα πρώτο αριθμό.
- Ο K είναι πολλαπλάσιο του 5.
- Ο P είναι περιττός αριθμός, αλλά όχι πρώτος.
- Ο Σ είναι το τετράγωνο πρώτου αριθμού.
- Ο T είναι πρώτος αριθμός και είναι επίσης ο μέσος όρος των Π και K.

(α) Να βρείτε τον μεγαλύτερο βαθμό διαγωνίσματος που έγραψε ο μαθητής.
(β) Να βρείτε τον μέσο όρο με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου των διαγωνισμάτων του μαθητή.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

(α) Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

1. Οι διψήφιοι πρώτοι αριθμοί και το άθροισμα των ψηφίων τους είναι
$$11, 13, 17, 19$$
με άθροισμα ψηφίων
$$1+1=2, \qquad 1+3=4, \qquad 1+7=8\,, \qquad 1+9=10$$
Επομένως $\Pi = 11$.

2. Το K μπορεί να πάρει τις τιμές 5,10,15.
3. Οι περιττοί αριθμοί από το 2 μέχρι και το 19 που δεν είναι πρώτοι είναι το 9 και το 15. Επομένως το P είναι 9 ή 15.
4. Το Σ μπορεί να είναι $2^2 = 4$ ή $3^2 = 9$.
5. Το T μπορεί να πάρει τις τιμές
$$\frac{11+5}{2} = 8, \qquad \frac{11+10}{2} = 10{,}5 \text{ ή } \frac{11+15}{2} = 13$$
Επομένως
$$T = 13, \qquad K = 15, \qquad \Pi = 11$$
Αφού όλοι οι αριθμοί είναι διαφορετικοί μεταξύ τους θα έχουμε
$$P = 9.$$
Αφού το Σ δεν μπορεί να είναι 9, θα έχουμε ότι $\Sigma = 4$.

(β) Ο μέσος όρος με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου των διαγωνισμάτων του μαθητή.
$$\frac{4+9+11+13+15}{5} = 10{,}4.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2019
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
Παρασκευή 1 Φεβρουαρίου 2019 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ
Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΧΟΛΕΙΟ………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης	Ώρα λήξης 11:00	Ώρα παράδοσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

(Α). Έχουμε δύο καλάθια με φρούτα. Στο καλάθι (I) υπάρχουν αρχικά $\boldsymbol{\alpha}$ το πλήθος πορτοκάλια και στο καλάθι (II) υπάρχουν αρχικά $\boldsymbol{\beta}$ το πλήθος μανταρίνια.

(I)

(II)

Κάποιος παίρνει το $\frac{1}{5}$ των φρούτων από το καλάθι (I) και τα μεταφέρει στο καλάθι (II). Στην συνέχεια παίρνει το $\frac{1}{5}$ των φρούτων που υπάρχουν στο καλάθι (II) και τα μεταφέρει στο καλάθι (I). Τώρα και τα δύο καλάθια έχουν από 32 φρούτα. Να βρείτε πόσα πορτοκάλια και πόσα μανταρίνια είχαν αρχικά τα καλάθια.

(Β). Δίνονται πέντε σωροί από κέρματα του ευρώ.

- Ο σωρός (I) αποτελείται από κέρματα των 2 $ευρώ$
- ο σωρός (II) από κέρματα του 1 $ευρώ$,
- ο (III) από κέρματα των 50 $σεντ$,
- ο (IV) των 20 $σεντ$ και
- ο (V) των 10 $σεντ$.

Κάνουμε την εξής διαδικασία:
Στην αρχή το $\frac{1}{5}$ των κερμάτων του σωρού (I) το μεταφέρουμε και το προσθέτουμε στον σωρό (II).
Μετά, $\frac{1}{5}$ των κερμάτων που υπάρχουν τώρα στον σωρό (II) το μεταφέρουμε και το προσθέτουμε στον σωρό (III).
Στην συνέχεια $\frac{1}{5}$ των κερμάτων που υπάρχουν τώρα στον σωρό (III) το μεταφέρουμε και το προσθέτουμε στον σωρό (IV).
Μετά, $\frac{1}{5}$ των κερμάτων που υπάρχουν τώρα στον σωρό (IV) το μεταφέρουμε και το προσθέτουμε στον σωρό (V).
Τέλος , $\frac{1}{5}$ των κερμάτων που υπάρχουν τώρα στον σωρό (V) το μεταφέρουμε και το προσθέτουμε στον σωρό (I).
Μετά το τέλος της διαδικασίας υπάρχουν 32 κέρματα σε κάθε σωρό.
Να βρείτε την αξία σε ευρώ των νομισμάτων που υπάρχουν συνολικά σε όλους τους σωρούς αρχικά.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

(Α) Η διαδικασία της μεταφοράς ολοκληρώνεται σε 3 φάσεις, την αρχική και τις δύο των μεταφορών, όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα:

	Αρχική Φάση	$2^η$ Φάση	$3^η$ Φάση
Πλήθος φρούτων στο καλάθι *(I)*	α	$\frac{4}{5}\alpha$	$\frac{4}{5}\alpha+\frac{1}{5}\left(\beta+\frac{1}{5}\alpha\right)$
Πλήθος φρούτων στο καλάθι *(II)*	β	$\beta+\frac{1}{5}\alpha$	$\frac{4}{5}\left(\beta+\frac{1}{5}\alpha\right)$

Σύμφωνα με το πρόβλημα, έχουμε: $\frac{4}{5}\alpha+\frac{1}{5}\left(\beta+\frac{1}{5}\alpha\right)=32$: (1)

και $\frac{4}{5}\left(\beta+\frac{1}{5}\alpha\right)=32 \Rightarrow \frac{1}{5}\left(\beta+\frac{1}{5}\alpha\right)=8$: (2)

$$(1) \Rightarrow \frac{4}{5}\alpha+8=32 \Rightarrow \boxed{\alpha=30}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{5}(\beta+6)=8 \Rightarrow \beta+6=40 \Rightarrow \boxed{\beta=34}$$

(Β) Ας υποθέσουμε ότι αρχικά οι σωροί $(I),(II),(III),(IV),(V)$ έχουν x,y,z,u,v νομίσματα, αντίστοιχα.
Η διαδικασία της μεταφοράς ολοκληρώνεται σε 6 φάσεις, την αρχική και τις πέντε των μεταφορών, όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα:

	Αρχική Φάση	**$1^η$ Φάση**	**$2^η$ Φάση**	**$3^η$ Φάση**	**$4^η$ Φάση**	**$5^η$ Φάση**
Σωρός *(I)*	x	$\frac{4x}{5}$				$x'=\frac{4x}{5}+\frac{v'}{5}$
Σωρός *(II)*	y	$y'=y+\frac{x}{5}$	$\frac{4y'}{5}$			
Σωρός *(III)*	z	z	$z'=z+\frac{y'}{5}$	$\frac{4z'}{5}$		
Σωρός *(IV)*	u	u	u	$u'=u+\frac{z'}{5}$	$\frac{4u'}{5}$	
Σωρός *(V)*	v	v	v	v	$v'=v+\frac{u'}{5}$	$\frac{4v'}{5}$

Στο τέλος της διαδικασίας, κάθε σωρός έχει αριθμό νομισμάτων όσο δείχνουν τα τελευταία (σκιασμένα) κελιά της κάθε σειράς του πίνακα, που, σύμφωνα με το πρόβλημα, όλοι είναι ίσοι με 32. Συνεπώς έχουμε:

$$x'=\frac{4y'}{5}=\frac{4z'}{5}=\frac{4u'}{5}=\frac{4v'}{5}=32$$

Άρα, $v'=u'=z'=y'=40$ και $x'=32 \Rightarrow \frac{4x}{5}+8=32 \Rightarrow \boxed{x=30}$
Οπότε, διαδοχικά

$y'=y+6 \Rightarrow \boxed{y=34}$

$z'=z+\frac{y'}{5} \Rightarrow 40=z+8 \Rightarrow \boxed{z=32}$

$u'=u+\frac{z'}{5} \Rightarrow 40=u+8 \Rightarrow \boxed{u=32}$ και

$v'=v+\frac{u'}{5} \Rightarrow 40=v+8 \Rightarrow \boxed{v=32}$

Τέλος, η αξία σε ευρώ των νομισμάτων που υπάρχουν συνολικά σε όλους τους σωρούς αρχικά είναι: $30\cdot 2+34\cdot 1+32\cdot 0{,}50+32\cdot 0{,}20+32\cdot 0{,}10=\mathbf{119{,}60}$

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2019*** ***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ*** ***Παρασκευή 1 Φεβρουαρίου 2019 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ*** ***Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου***	ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ

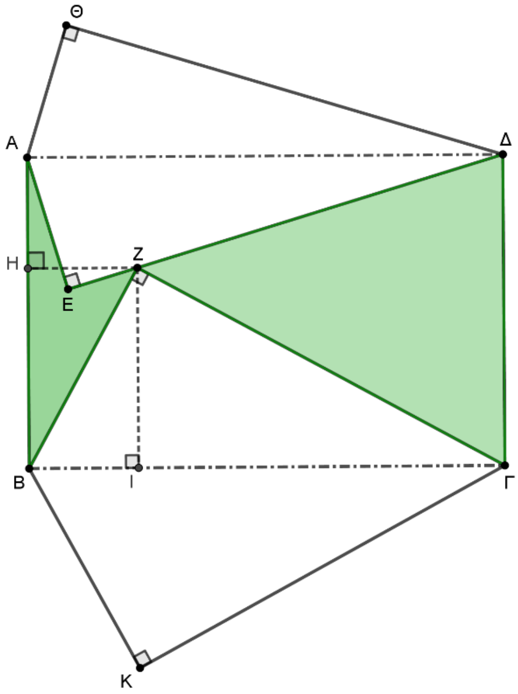
ΣΧΟΛΕΙΟ…………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης	Ώρα λήξης 11:45	Ώρα παράδοσης

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Στο οικόπεδο με βάση το πολύγωνο $ΑΘΔΓΚΒΑ$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, πρόκειται να κτιστούν δύο όμοια εμπορικά κέντρα με βάσεις τα τετράπλευρα $ΕΑΘΔ$ και $ΒΖΓΚ$, τα οποία θα επικοινωνούν στο σημείο $Ζ$ που βρίσκεται πάνω στην $ΔΕ$. Το υπόλοιπο μέρος του οικοπέδου (σκιασμένο μέρος) θα είναι κοινόχρηστοι χώροι.

Γνωρίζουμε ότι, $ΑΕ = ΑΘ = 21m$, $ΕΔ = 72m$, $\angle ΑΕΔ = \angle ΑΘΔ = 90°$. Επίσης, $ΒΖ = ΒΚ = 45m$, $\angle ΒΖΓ = \angle ΒΚΓ = 90°$ και το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να υπολογίσετε :



- **I.** Το εμβαδόν του τετράπλευρου $ΕΑΘΔ$.
- **II.** Το εμβαδόν του του τετράπλευρου $ΒΖΓΚ$.
- **III.** Την απόσταση του σημείου $Ζ$ από τις πλευρές του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$, δηλαδή τις αποστάσεις $ΖΙ, ΖΗ$.
- **IV.** Το εμβαδόν των κοινόχρηστων χώρων του οικοπέδου.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ</u>

I. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΕΔ$ είναι $(ΑΕΔ) = \frac{(ΑΕ)(ΕΔ)}{2} = \frac{21 \cdot 72}{2} m^2 = 756m^2$.
Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΕΔ, ΑΘΔ$είναι ίσα, έχουμε $(ΕΑΘΔ) = 2(ΑΕΔ) = \mathbf{1512m^2}$

II. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΕΔ$ παίρνουμε
$(ΑΔ)^2 = 21^2 + 72^2 = 5625 \Longrightarrow (ΑΔ) = 75m$ και, αφού το $ΑΒΓΔ$ ορθογώνιο, είναι $(ΒΓ) = 75m$.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $ΒΖΓ$ παίρνουμε
$(ΖΓ)^2 = (ΒΓ)^2 - (ΒΖ)^2 = 75^2 - 45^2 = (75 - 45)(75 + 45) = 3600 \Longrightarrow (ΖΓ) = 60m$
Το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΖΓ$ είναι $(ΒΖΓ) = \frac{(ΒΖ)(ΖΓ)}{2} = \frac{45 \cdot 60}{2} m^2 = 1350m^2$.
Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΖΓ, ΒΚΓ$είναι ίσα, έχουμε $(ΒΖΓΚ) = 2(ΒΖΓ) = \mathbf{2700m^2}$

III. Είναι, $(ΒΖΓ) = 1350 \Longrightarrow \frac{1}{2}(ΒΓ)(ΖΙ) = 1350 \Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot (ΖΙ) = 1350 \Longrightarrow \boxed{\mathbf{(ΖΙ) = 36m}}$

$$(ΖΗ) = (ΙΒ) = \sqrt{(ΒΖ)^2 - (ΖΙ)^2} = \sqrt{45^2 - 36^2} = \sqrt{9 \cdot 81} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{(ΖΗ) = 27m}}$$

IV. Η προέκταση του IZ τέμνει την $A\Delta$ στο Λ. Άρα $AB = IZ + Z\Lambda$.

$(\Lambda\Delta) = (I\Gamma) = (B\Gamma) - (IB) \Longrightarrow$

$(\Lambda\Delta) = (I\Gamma) = 75 - 27 = 48m$

Για τον υπολογισμό του $Z\Lambda = x$, θέτουμε $EZ = \alpha$, οπότε $Z\Delta = 72 - \alpha$.

Τώρα, $(AE\Delta) = (AEZ) + (AZ\Delta) \Longrightarrow$

$756 = \frac{21\alpha}{2} + \frac{75x}{2} \Longrightarrow 72 - a = \frac{25x}{7}$ (*)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $Z\Lambda\Delta$ έχουμε

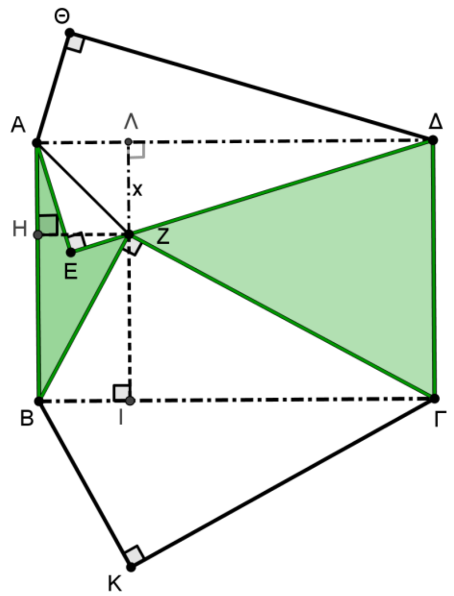
$$x^2 + 48^2 = (72 - a)^2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} x^2 + 48^2 = \frac{625x^2}{49}$$

$$\Longrightarrow \frac{576x^2}{49} = 48^2$$

$$\Longrightarrow x = 14m$$

Έτσι, $(AB) = (IZ) + x = 36 + 14 \Longrightarrow (AB) = 50m$

Το εμβαδόν των κοινόχρηστων χώρων είναι:



$$\mathrm{E}_{\kappa o \iota \nu} = (AB\Gamma\Delta) - (AE\Delta) - (BZ\Gamma) = 50 \cdot 75 - 756 - 1350 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{E}_{\kappa o \iota \nu} = \mathbf{1644m^2}}$$