



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-B02

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Με πόσους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε ακριβώς k κορυφές ενός n -γώνου κόκκινες, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο συνεχόμενες κορυφές που να είναι χρωματισμένες κόκκινες;

Πηγή: Μολδαβία (Επιλογής) 2015

Προτεινόμενη Λύση

Ας ονομάσουμε $f(n, k)$ το ζητούμενο πλήθος. Ας ονομάσουμε επίσης $g(n, k)$ το πλήθος των τρόπων που μπορούμε, αν έχουμε n σημεία στην σειρά, να χρωματίσουμε ακριβώς k από αυτά κόκκινα, ώστε να μην υπάρχουν δυο συνεχόμενα σημεία που να είναι κόκκινα.

Ας αριθμήσουμε τις κορυφές του n -γώνου διαδοχικά από το 1 ως το n . Υπάρχουν $g(n-3, k-1)$ τρόποι να χρωματιστούν οι κορυφές, ώστε η 1 να είναι κόκκινη. (Οι 2 και n απαγορεύεται να χρωματιστούν, ενώ από τις $3, \dots, n-1$ πρέπει να χρωματίσουμε $k-1$ κόκκινες, ώστε να μην υπάρχουν δύο συνεχόμενες κόκκινες.) Επίσης, υπάρχουν $g(n-1, k)$ τρόποι, ώστε η 1 να μην χρωματιστεί. Άρα:

$$f(n, k) = g(n-3, k-1) + g(n-1, k)$$

Με παρόμοιο τρόπο, για το $g(n, k)$ έχουμε την αναδρομική σχέση:

$$g(n, k) = g(n-1, k) + g(n-2, k-1)$$

Ορίζοντας $h(n, k) = g(n+k, k)$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} h(n, k) &= g(n+k, k) \\ &= g(n+k-1, k) + g(n-2+k, k-1) \\ &= h(n-1, k) + h(n-1, k-1) \end{aligned}$$

Ο λόγος που ορίσαμε έτσι την h είναι για να καταλήξουμε στην πιο πάνω αναδρομική σχέση, η οποία γνωρίζουμε ότι ικανοποιείται από τους διωνυμικούς συντελεστές $\binom{n}{k}$. Ακόμη, πιο γενικά ικανοποιείται από τους $\binom{n+r}{k+s}$ για οποιουσδήποτε σταθερούς μη αρνητικούς ακεραίους r, s .

Μένει, λοιπόν, να δούμε αν μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα r, s , ώστε να ικανοποιούνται και οι αρχικές συνθήκες. Επειδή $h(1, k) = g(k+1, k)$, οι αρχικές συνθήκες είναι οι $h(1, 0) = g(1, 0) = 1$, $h(1, 1) = g(2, 1) = 2$ και $h(1, 2) = g(3, 2) = 1$. (Επιπλέον, αν $k \geq 3$, τότε είναι $h(1, k) = 0$ αφού αν έχουμε $k+1$ σημεία και θέλουμε να επιλέξουμε τα k , τότε αναγκαστικά θα επιλέξουμε δύο συνεχόμενα.)

Επαγωγικά τώρα, είναι απλό να δειχθεί ότι $h(n, k) = \binom{n+1}{k}$.

Άρα, παίρνουμε $g(n, k) = h(n-k, k) = \binom{n-k+1}{k}$ και εν τέλει έχουμε:

$$\begin{aligned} f(n, k) &= g(n-3, k-1) + g(n-1, k) \\ &= \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} \end{aligned}$$