



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2017-A01

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b και c . Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Πηγή: Παναφρικανική Ολυμπιάδα 2005

Προτεινόμενη Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την πιο κάτω ανισότητα:

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Αν $a_1, a_2, \dots, a_n$ και $b_1, b_2, \dots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2$$

Εφαρμόζοντάς την με $n = 2$, $a_1 = \sqrt{a}$, $a_2 = \sqrt{b}$, $b_1 = 1/\sqrt{a}$ και $b_2 = 1/\sqrt{b}$, λαμβάνουμε:

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq (1+1)^2 = 4$$

Ισοδύναμα, έχουμε:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (1)$$

Ομοίως, λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c} \quad \text{και} \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2), παίρνουμε

$$2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a},$$

που δίνει την πρώτη από τις δύο ζητούμενες ανισότητες.

Για την δεύτερη ανισότητα, πάλι από την Cauchy-Schwarz, έχουμε:

$$((a+b) + (b+c) + (c+a)) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 9$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με το $(a+b+c)$, παίρνουμε την δεύτερη ανισότητα.

Σχόλιο

Αντί της ανισότητας Cauchy-Schwarz, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την πιο κάτω ανισότητα:

Ανισότητα AM-HM

Αν $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Πράγματι, όλες οι ανισότητες που χρησιμοποιήσαμε στην προτεινόμενη λύση προκύπτουν άμεσα και από την ανισότητα AM-HM. Η ανισότητα παίρνει το όνομά της από τον αριθμητικό μέσο (Arithmetic Mean) και αρμονικό μέσο (Harmonic Mean)

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \quad \text{και} \quad \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

αντίστοιχα, των $a_1, \dots, a_n$. Η ανισότητα AM-HM προκύπτει και αυτή με την σειρά της από την ανισότητα Cauchy-Schwarz με παρόμοιο τρόπο, όπως και στην προτεινόμενη λύση.